

邊界元素法在超薄疊層複合材料結構之慣性效應下的應力分析

夏育群*、黃文昇

逢甲大學航太與系統工程學系

摘要

正確的複材層面應力分析，對評估材料的結構及分析扮演著重要的角色，而隨著科技的進步，複材的厚度越來越薄。傳統之有限元素及邊界元素法對此種薄型結構之分析將面臨使用過多元素之問題，因而造成過度運算。本專題將報導如何使用邊界元素法以極少之分割元素來分析超薄疊層複合材料在旋轉效應下的層面應力分佈。文中描述如何將異向彈力之邊界積分做正規化處理，以一般之高斯積分及解析積分正確求解。此法已鍵入作者建立之電腦程式，文末並以一數值範例做一簡要之驗證說明。

關鍵字: 邊界元素法、奇異性、薄層複材、慣性效應

一、前言

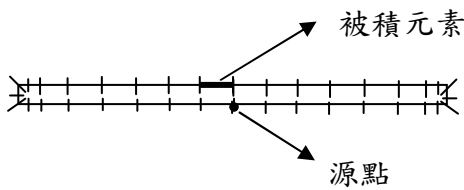
近年來，疊層複合材料在工程上的大量應用已吸引相當可觀的利益及興趣，因此，材料間的介面配合是極度重要的。在適當的模擬與分析下，有效的設計可以降低材料彼此間脫層損壞之可能性。由於與疊層平面上之應力相較之下，複材在厚度方向的疊層之層面應力相對較高，因此本文之探討乃限於在厚度方向的疊層之層間應力。

對於許多航太科技應用上，在結構元件之薄層約在 1.5~2mm 【1】，諸如像油箱、發動機葉片。許多數值文獻裡，皆有探討諸如此類結構之分析，如：Lajczok 【2】已應用 FDM 的技巧對應變及彎曲形狀藉由 MSC/NASTRAN 獲得疊層複材的解，並去計算出其導數。以及藉由使用 2D 有限元素的方式，Tolson 【3】計算出在疊層的複合材料裡的內層之應力，並且預測結構失敗率之改善。Lo 【4】使用高階剪應變法找到橫向應力元素。此外，讀者亦可參考文獻【5】由 Kant 和 Swaminathan 評估當下薄板複材裡之橫向/內層之應力研究。對於疊層複材以邊界元素法模擬而言，如果疊層之複材很薄（如圖一所示），則將發生源點靠被積元素太近之問題。為了解決此等近乎奇異積分之問題，歷年來多位學者皆致力於此研究。然而，以往所做之研究皆為分析等向材料，在文獻中少見對於異向材料處理近乎奇異積分之報導。另外，值得一提的是 - 若欲以有限元素法解決如圖二

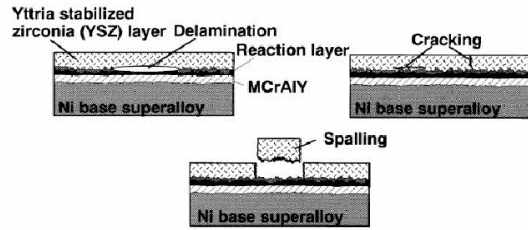
*副教授 Email: ycshiah@fcu.edu.tw, Tel: 04-2451-7250 Ext. 3956

所示之薄膜鍍層之問題，其將會比較耗時且比較沒效率。此原因在於有限元素法之內部網格分割 - 如果網格之長、寬尺寸不在同一冪次，其數值計算必將失真。因此，當組成材料很薄時，對一般記憶體有限之個人電腦，若採用有限元素法做全域分割，電腦將會運算遲緩。此時，邊界元素法便成為較理想之分析方法，因其可用極少數之格點，模擬出同樣的結果。但使用邊界元素法來做分析，則會遇到近似奇異性的問題，此專題將描述如何處理此問題。

在航太科技領域裡，有很多是在旋轉運動下進行，如發動機的葉片、直升機的螺旋槳...等。而不同材質間的黏合面將會是分析的重點。藉由 Zhang 【6】於 1996 年成功地將體積分轉換成功，本專題將以參考文獻【6】所推導之邊界積分式為基礎，將其正規化以應用於分析超薄疊層複材在慣性效應的應力分析。專題末了將以一例子以說明其應用。



圖一、疊層複材每層之模擬



圖二、絕熱塗層之裂縫成長示意圖

二、平面異向性的邊界積分式

目前現有的邊界元素法文獻資料裡(參閱 e. g Cruse, 1988)，在彈性體的邊界 S 上，節點位移 u_i 以及節點拉曳力 t_j 的邊界積分式可表示為：

$$C_{ij}(P)u_i(P) + \oint_{\partial\Omega} u_i(Q)T_{ij}(P,Q)dS = \oint_{\partial\Omega} t_i(Q)U_{ij}(P,Q)dS + \int_{\Omega} X_i(q)U_{ij}(P,q)d\Omega \quad (1)$$

其中 X_i 為體力向量； S 以及 Ω 各別表示為邊界以及全域； Q 為在邊界裡的場點， q 為在全域裡的場點； $C_{ij}(P)$ 為在全域裡源點 P 之幾何相關係數； $T_{ij}(P,Q)$ 為拉曳力的基礎函數； $U_{ij}(P,Q)$ 為位移的基礎函數。其中對這些基礎函數又可更明確的表示為：

$$U_{ij}(P,Q) = 2\text{Re}[[r_{i1}A_{j1} \log z_1 + r_{i2}A_{j2} \log z_2]] \quad (2a)$$

$$T_{1j} = 2n_1 \text{Re}[[\mu_1^2 A_{j1}/z_1 + \mu_2^2 A_{j2}/z_2]] - 2n_2 \text{Re}[[\mu_1^2 A_{j1}/z_1 + \mu_2^2 A_{j2}/z_2]] \quad (2b)$$

$$T_{2j} = -2n_1 \text{Re}[[\mu_1 A_{j1}/z_1 + \mu_2 A_{j2}/z_2]] + 2n_2 \text{Re}[[A_{j1}/z_1 + A_{j2}/z_2]] \quad (2c)$$

在上式中， n_i 是在 Q 點上的單位法向量之元素； $\text{Re}[\]$ 是指取實數部分的符號； z_i 廣泛定義以特徵根 (μ_i) 型式為表示的複合變數。在局部座標內的場點為 $Q(x_1, x_2)$ ，源點為 $P(x_{p1}, x_{p2})$ ，則

$$z_k = (x_1 - x_{p1}) + \mu_k(x_2 - x_{p2}) = \zeta_1 + \mu_k \zeta_2 \quad (3)$$

根據 Lekhnitskii(1963) 【7】對異向性材料之描述， μ_i 是下式特徵公式之四個相異複數根

$$a_{11}\mu^4 - a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (4)$$

a_{mn} 為材料彈性之柔度矩陣； r_{mn} 為材料常數，其定義如下

$$r_{1n} = a_{11}\mu_n^2 + a_{12} - a_{16}\mu_n, \quad r_{2n} = a_{12}\mu_n^2 + a_{22} - a_{26}\mu_n \quad (5)$$

而 A_{jk} 可從下列公式得到的複數常數

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{A}_{j1}] \\ \text{Im}[\mathbf{A}_{j1}] \\ \text{Re}[\mathbf{A}_{j2}] \\ \text{Im}[\mathbf{A}_{j2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4\pi\delta_{j2} \\ 1/4\pi\delta_{j2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\mathbf{B}_k] = [\mathbf{i} \quad \mu_k \quad r_{1k} \quad r_{2k}]^T \quad (7)$$

其中在方程式中的 δ_{jk} 定義為 Kronecker 函數。

為了用數值方法來求解其邊界積分式，在邊界上可分割成 M 個元素，共有 N 個節點。下面為內插任何 n 階元素所代表的節點座標、位移、拉曳力的表示式，

$$x_j(\xi) = \sum_{c=1}^{n+1} N^{(c)}(\xi)x_j^{(c)}, \quad u_j(\xi) = \sum_{c=1}^{n+1} N^{(c)}(\xi)u_j^{(c)}, \quad t_j(\xi) = \sum_{c=1}^{n+1} N^{(c)}(\xi)t_j^{(c)} \quad (8)$$

其中 $\xi \in [-1, 1]$ 。 $N^{(c)}$ 代表的是形狀函數，其表示式如下

$$N^{(c)}(\xi) = \sum_{m=0}^n \alpha_m^{(c)} \xi^m \quad (9)$$

而在邊界裡之體力體積分轉換 【6】如下

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X_i(q)U_{ij}(P, q)d\Omega &= \oint_{\partial\Omega} \Phi U_{ij}(P, Q)n_i ds - \oint_{\partial\Omega} \Phi H_{ij}(P, Q)n_i ds \\ &+ \oint_{\partial\Omega} \Phi_{,i} H_j(P, Q)n_i ds \end{aligned} \quad (10)$$

因此，我們可以將式(1)改寫成

$$C_{ij}(P)u_i(P) = \oint_{\partial\Omega} t_i(Q)U_{ij}(P,Q)dS - \oint_{\partial\Omega} u_i(Q)T_{ij}(P,Q)dS + \oint_{\partial\Omega} \Phi U_{ij}(P,Q)n_i ds - \oint_{\partial\Omega} \Phi H_{ij}(P,Q)n_i ds + \oint_{\partial\Omega} \Phi_{,i} H_j(P,Q)n_i ds \quad (11)$$

式(11)裡的一些代號定義如下：

$$H_{i,j}(P,Q) = 2 \operatorname{Re} \left[r_{i1} \mu_{i1} \mu_{i1} A_{j1} G'_1 + r_{i2} \mu_{i2} \mu_{i2} A_{j2} G'_2 \right] \quad (12a)$$

$$H_j(P,Q) = 2 \operatorname{Re} \left[r_{i1} \mu_{i1} A_{j1} G_1 + r_{i2} \mu_{i2} A_{j2} G_2 \right] \quad (12b)$$

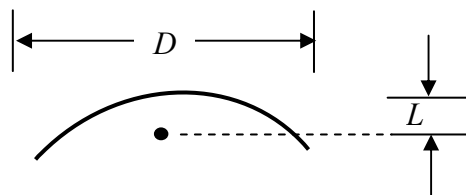
$$G_1(P,q) = \frac{1}{\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2} z_1 \log(z_1) \quad , \quad G_2(P,q) = \frac{1}{\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2} z_2 \log(z_2) \quad (12c)$$

$$G'_1(P,q) = \frac{(\log(z_1)+1)}{\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2} \quad , \quad G'_2(P,q) = \frac{(\log(z_2)+1)}{\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2} \quad (12d)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) = \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} N^{(c)}(\xi) \quad , \quad \Phi_{,i} = X_i \quad (12e)$$

三、位移基礎函數的積分正規化

邊界元素法在處理此類實際工程之應用問題時，將常遇到一項高度困難問題－近乎奇異積分。此問題是發生於當源點（Source Point）與被積元素間之距離遠小於被積元素本身之長度時（ $D \ll L$ ，如圖三所示），一般所採用之高斯積分法並無法以少數之積分點（十點以下）提供正確之積分數值，而過多之積分點（十點以上）又將大幅遲化計算之效率及速度。此等問題在邊界元素法之模擬中可分為三型：（一）、異向/異向之材料接合；（二）、異向/等向之材料接合；（三）、等向/等向之材料接合。其中第三項之問題在邊界元素法之文獻記載中已有完整而有效之分析，但對於前兩者之問題相對較少有文獻報告。近十年來，已有很多研究開始處理近乎奇異積分（即為邊界積分式中的 $\frac{1}{r}$ 和 $\log(r)$ 項）的問題；由邊界元素法文獻中可知當分析超薄物件時，原始的邊界積分式（Conventional Boundary Integral Equation - CBIE）中積分項是無法以一般高斯積分法來正確求解【8】【9】。



圖三、近乎奇異積分之情形

以下作者將對基礎函數 U_{ij} 進行分部積分正規化轉換。由於 U_{ij} 項中奇異性屬於 $\log(z_m)$ 弱奇異性，所以只需一次使用分部積分轉換即可。如前所述，此轉換技術可應用於任意高階之元素。在此僅用普遍性較高之三點二階非線性元素為闡述之範例；另外為求推導過程簡潔，所有係數項設定時皆以單一符號設定而省略張量符號之下標。

正規化過程前，應先注意此方法可應用於各階的元素。儘管採用高階元素、更多的公式去分析模擬會有較好的成果。但是在本質上，使用二接元素去分析模擬有著跟高階元素一樣的效能，並且能將公式簡單化。因此，此專題以典型二次及三次等參數元素為例子來分析。首先我們先對式(11)裡的第一項 $\oint_{\partial\Omega} t_i(Q)U_{ij}(P,Q)dS$ 分析，此項可更精簡的寫成為

$$\sum_{c=1}^{n+1} {}^b t_i^{(c)} \int_{-1}^1 2 \operatorname{Re}[[r_{i k} A_{j k} \log {}^b z_k]] N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (13)$$

而 z_k 以及 Jacobian $J(\xi)$ 的表示式如下

$${}^b z_k = B_l \xi^2 + C_l \xi + D \quad (14a)$$

$$J(\xi) = \sqrt{B_0 \xi^2 + C_0 \xi + D_0} \quad (14b)$$

而其它的參數定義如下

$$B_l = \frac{({}^b x_1^{(3)} + \mu_k {}^b x_2^{(3)}) + ({}^b x_1^{(1)} + \mu_k {}^b x_2^{(1)})}{2} - ({}^b x_1^{(2)} + \mu_k {}^b x_2^{(2)}) \quad (15a)$$

$$C_l = \frac{({}^b x_1^{(3)} + \mu_k {}^b x_2^{(3)}) + ({}^b x_1^{(1)} + \mu_k {}^b x_2^{(1)})}{2} \quad (15b)$$

$$D_l = ({}^b x_1^{(2)} + \mu_k {}^b x_2^{(2)}) - ({}^b x_{p1} + \mu_k {}^b x_{p2}) \quad (15c)$$

$$B_0 = E_l^2 + E_2^2 \quad (15d)$$

$$C_0 = E_1 F_1 + E_2 F_2 \quad (15e)$$

$$D_0 = F_1^2 + F_2^2 \quad (15f)$$

$$E_l = {}^b x_1^{(1)} - 2 {}^b x_1^{(2)} + {}^b x_1^{(3)} \quad (15g)$$

$$E_2 = {}^b x_2^{(1)} - 2 {}^b x_2^{(2)} + {}^b x_2^{(3)} \quad (15h)$$

$$F_1 = \frac{{}^b x_1^{(3)} - {}^b x_1^{(1)}}{2} \quad (15i)$$

$$F_2 = \frac{{}^b x_2^{(3)} - {}^b x_2^{(1)}}{2} \quad (15j)$$

接著將式(9)、(14a)、(14b)帶入式(13)即可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \int_{-1}^1 2 \operatorname{Re} \llbracket r_{i k} A_{j k} \log^b z_k \rrbracket N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \operatorname{Re} \llbracket \int_{-1}^1 r_{i k} A_{j k} 2N^{(c)}(\xi) \log(B_1 \xi^2 + C_1 \xi + D_1) \sqrt{B_0 \xi^2 + C_0 \xi + D_0} d\xi \rrbracket \\ &= \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \operatorname{Re} \llbracket \int_{-1}^1 r_{i k} A_{j k} 2N^{(c)}(\xi) [\log B_1 + (\log - R_1) + (\log - R_2)] \sqrt{B_0 \xi^2 + C_0 \xi + D_0} d\xi \rrbracket \quad (16) \end{aligned}$$

$$R_{1/2} = \frac{-C_1 / B_1 \pm \sqrt{(C_1 / B_1)^2 - 4(D_1 / B_1)}}{2} \quad (17)$$

為了解決其近似奇異性的問題，對式(13)使用分部積分可得下式

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \int_{-1}^1 2 \operatorname{Re} \llbracket r_{i k} A_{j k} \log^b z_k \rrbracket N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \operatorname{Re} \llbracket r_{i k} A_{j k} \left\{ \left[J(\xi) \nu(\xi) 2N^{(c)}(\xi) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \nu(\xi) \Omega^{(c)}(\xi) d\xi \right\} \rrbracket \quad (18) \end{aligned}$$

上式中之上標 (c) 表示三點二階元素之第 c 個點。而其中的 $\nu(\xi)$ 定義如下：

$$\nu(\xi) = \xi \log B_1 + (\xi - R_1) [\log(\xi - R_1) - 1] + (\xi - R_2) [\log(\xi - R_2) - 1] \quad (19)$$

$\Omega^{(c)}(\xi)$ 定義如下：

$$\Omega^{(1)}(\xi) = (2\xi - 1)J(\xi) + \frac{(\xi^2 - \xi)(2B_0\xi + C_0)}{2J(\xi)} \quad (20a)$$

$$\Omega^{(2)}(\xi) = -2\xi J(\xi) + \frac{(1 - \xi^2)(2B_0\xi + C_0)}{2J(\xi)} \quad (20b)$$

$$\Omega^{(3)}(\xi) = (2\xi + 1)J(\xi) + \frac{(\xi^2 + \xi)(2B_0\xi + C_0)}{2J(\xi)} \quad (20c)$$

如此一來，對其奇異性的正規化目前已完成。但上面之推導屬於三點二次非直線的推導，以下將是對三點二次直線元素來進行討論。有別於二次非直線元素推導之處為，此二次直線元素之正規化轉換後可得其解析解。另外，為求推導過程簡潔，如同之前對非線性元素之推導，所有係數項設定皆以單一符號設定而省略張量符號。對直線元素，其中間節點的座標可表示為

$$x_1^{(2)} = \frac{x_1^{(1)} + x_1^{(3)}}{2}, \quad x_2^{(2)} = \frac{x_2^{(1)} + x_2^{(3)}}{2} \quad (21)$$

在元素 b 的任意點上之座標形狀函數表示為

$${}^b x_j(\xi) = \sum_{c=1}^n N^{(c)}(\xi) {}^b x_j^{(c)} = \frac{({}^b x_j^{(3)} - {}^b x_j^{(1)})\xi + ({}^b x_j^{(3)} + {}^b x_j^{(1)})}{2} \quad (22)$$

並利用上面所述的的關係式，可以得到 $B_0 = C_0 = 0$ ，所以式(14a)可表示為

$${}^b z_k = C_1 \xi + D_1 \quad (23)$$

而參數 C_1, D_1 在這定義為

$$C_1 = \frac{({}^b x_1^{(3)} + \mu_k {}^b x_2^{(3)}) - ({}^b x_1^{(1)} + \mu_k {}^b x_2^{(1)})}{2} \quad (24a)$$

$$D_1 = ({}^b x_1^{(2)} + \mu_k {}^b x_2^{(2)}) - ({}^b x_{p1} + \mu_k {}^b x_{p2}) \quad (24b)$$

因此將式(22)、(23)代換成直線元素，而式(13)可重新整理為

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \int_{-1}^1 2 \operatorname{Re} \llbracket r_{i,k} A_{j,k} \log^b z_k \rrbracket N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \operatorname{Re} \llbracket \int_{-1}^1 r_{i,k} A_{j,k} 2N^{(c)}(\xi) [\log C_1 + \log(\xi + R_0)] \sqrt{D_0} d\xi \rrbracket \end{aligned} \quad (25)$$

其中， R_0 的定義如下

$$R_0 = \frac{D_1}{C_1} \quad (26)$$

對式(25)直接積分可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \int_{-1}^1 2 \operatorname{Re} \llbracket r_{i,k} A_{j,k} \log^b z_k \rrbracket N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 {}^b t_i^{(c)} \sqrt{D_0} \operatorname{Re} \llbracket r_{i,k} A_{j,k} \left[f^{(c)}(\xi) \Psi_1(\xi) - f'^{(c)}(\xi) \Psi_2(\xi) - 2(-1)^{(c)} \Psi_3(\xi) \right] \rrbracket \end{aligned} \quad (27)$$

函數 $\Psi_1(\xi) \sim \Psi_3(\xi)$ 的定義為

$$\Psi_1(\xi) = \xi \log C_1 + (\xi + R_0) [\log(\xi + R_0) - 1] \quad (28a)$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \xi^2 \log C_1 + (\xi + R_0)^2 \left[\log(\xi + R_0) - \frac{3}{2} \right] \right\} \quad (28b)$$

$$\Psi_3(\xi) = \frac{1}{3} \left[\xi^3 \log C_1 + (\xi + R_0)^3 \log(\xi + R_0) - \frac{11}{6} \xi^3 - \frac{11}{2} \xi^2 R_0 - \frac{11}{2} \xi R_0^2 - \frac{1}{3} R_0^3 \right] \quad (28c)$$

實際上，式(27)將可對直線元素精確地分析，並且式(25)、(27)有著適當的方程式去精確的計算位移基礎函數的弱奇異積分。

四、拉曳力基礎函數的積分正規化

藉著觀察式(11)的拉曳力積分式，其奇異性冪次為 $0(1/r)$ ，比位移積分式還來的強烈。為了解決此問題，將使用兩次的部份積分，使奇異積分正規化。然而，吾人可從以下之推導中可知，其實對拉曳力積分式正規化可採解析積分，其過程是很簡單易懂的。如同之前，將以非直線和直線的方式各別處理，並且會延用上述的一些關係式；另外單位法向量定義如下

$$n_1 = \frac{(E_2\xi + F_2)}{J(\xi)}, \quad n_2 = \frac{-(E_1\xi + F_1)}{J(\xi)} \quad (29)$$

並且對式(11)整理為

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} \int_{-1}^1 (-1)^{(i-1)} 2 \operatorname{Re} \left[\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk} \left(\frac{n_1 \mu_k + n_2}{b z_k} \right) \right] N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} (-1)^{(i-1)} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk}}{B_1(R_1 - R_2)} \left[\frac{\alpha^{(c)} G_k (R_1 - R_2)}{2} \xi^2 + [G_k (S_1 - S_2) + \alpha^{(c)} H_k (R_1 - R_2)] \xi \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + S_1 (H_k + R_1 G_k) \log(\xi - R_1) - S_2 (H_k + R_2 G_k) \log(\xi - R_2) \right] \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$G_k = E_2 \mu_k - E_1, \quad H_k = F_2 \mu_k - F_1, \quad S_{1/2} = \alpha^{(c)} R_{1/2}^2 + \beta^{(c)} R_{1/2} + \gamma^{(c)} \quad (31)$$

而 α^c ， β^c ， γ^c 的定義如下

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 1, & \alpha^2 &= -2, & \alpha^3 &= 1 \\ \beta^1 &= -1, & \beta^2 &= 0, & \beta^3 &= 1 \\ \gamma^1 &= 0, & \gamma^2 &= 2, & \gamma^3 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

式(30)已可準確的計算，並且不會遇到近似奇異性的難題。而此方法依然可以運用在高階元素上。對於直線元素，依然運用之前一樣的方式來推導。為此吾人將式(23)、(29)代入拉曳力積分式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} \int_{-1}^1 (-1)^{(i-1)} 2 \operatorname{Re} \left[\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk} \left(\frac{n_1 \mu_k + n_2}{b z_k} \right) \right] N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} (-1)^{(i-1)} \operatorname{Re} \left[\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk} \int_{-1}^1 \frac{(E_2 \xi - F_2) \mu_k - (E_1 \xi - F_1)}{C_1(\xi + R_0)} 2 N^{(c)}(\xi) d\xi \right] \quad (33) \end{aligned}$$

而從式(15g)、(15h)可窺見，對於直線元素上式中之 E_1 、 E_2 將為零，因此式(33)可更進一步簡化為：

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} \int_{-1}^1 (-1)^{(i-1)} 2 \operatorname{Re} \left[\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk} \left(\frac{n_1 \mu_k + n_2}{b z_k} \right) \right] N^{(c)}(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^2 b u_i^{(c)} (-1)^{(i-1)} \operatorname{Re} \left[\mu_k^{\delta_{i1}} A_{jk} \left[(\alpha^{(c)} R_0^2 - \beta^{(c)} R_0 + \gamma^{(c)}) \log \left(\frac{R_0 + 1}{R_0 - 1} \right) + 2(\beta^{(c)} - R_0 \alpha^{(c)}) \right] \right] \quad (34) \end{aligned}$$

上式中之代號都於前面定義過了。如此一來，對奇異性的正規化已經完成。

五、體力積分式的分析

接下來我們將對此專題的主要部分“體力積分式”來做詳細討論。由式(11)可知，最後一項的 $H_j(P, Q)$ 由式(12b)及(12c)可以判斷出其被積函數並無奇異性問題。因此只需要討論前兩項。此兩項的奇異性較大，因此吾人將使用解析積分的方法來解決此問題。首先，作者將討論式(11)右邊的第三項，並運用式(2a)、式(12a)、式(12c)，將原式化成更完整的表示式，代換過程如下：

$$\oint_{\partial\Omega} \Phi U_{ij}(P, Q) n_i ds = \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} \int_{-1}^1 N^{(c)}(\xi) U_{ij}(P, Q) n_i d\xi$$

$$= \sum_{c=1}^3 \left\{ \Phi^{(c)} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^2 \left[\left(\text{CON}_{3,i,c} \xi^3 + \text{CON}_{2,i,c} \xi^2 + \text{CON}_{1,i,c} \xi + \text{CON}_{0,i,c} \right) \right] \times 2 \text{Re} \left[r_{ik} A_{jk} \left[\log B_1 + (\log - R_1) + (\log - R_2) \right] \right] d\xi \right\} + \text{DIFFUG}_j^{(c)} \quad (35)$$

而其中的 $\text{CON}_{3,i,c}$ 、 $\text{CON}_{2,i,c}$ 、 $\text{CON}_{1,i,c}$ 、 $\text{CON}_{0,i,c}$ 分別代表 $N^{(c)}(\xi) \cdot n_i$ 之 ξ^3 、 ξ^2 、 ξ^1 、 ξ^0 之係數。在方程式(38)中之 $\text{DIFFUG}_j^{(c)}$ 乃為由於指數運算時會產生相角差，而導致於計算結果之誤差修正項。其 $\text{DIFFUG}_j^{(c)}$ 定義如下：

$$\text{DIFFUG}_j^{(c)} = \sum_{s=0}^9 \text{UG}_{j,s}^{(c)}(\xi) \cdot w_s \quad (36a)$$

$$\text{UG}_{j,s}^{(c)}(\xi) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(\text{CON}_{3,i,c} \xi^3 + \text{CON}_{2,i,c} \xi^2 + \text{CON}_{1,i,c} \xi + \text{CON}_{0,i,c} \right) 2 \text{Re} \left(r_{ik} A_{jk} \text{DIFF21}_j^{(c)} \right) \quad (36b)$$

$$\text{DIFF21}_s = \text{DIFF2}(t_s) - \text{DIFF1}(t_s) \quad (36c)$$

$$\text{DIFF1}(\xi) = \log \left[B_1 (\xi - R_1) (\xi - R_2) \right], \text{DIFF2}(\xi) = \log B_1 + \log(\xi - R_1) + \log(\xi - R_2) \quad (36d)$$

此方法為利用高斯積分來求解其相角差，而在方程式(36a)中之 w_s 為高斯積分權函數。如此，吾人即可對式(35)直接積分，個別分項積分後，再將所有結果相加化成一個簡單易懂的公式。 $H_3(\xi)$ 、 $H_2(\xi)$ 、 $H_1(\xi)$ 、 $H_0(\xi)$ 各別代表 $\xi^y \times (\log(\xi - R_{1/2}))$ 裡的 ξ^3 、 ξ^2 、 ξ^1 、 ξ^0 積分後的結果，其表示式如下：

$$H_3(\xi) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[\xi^4 - (R_{1/2})^4 \right] \log(\xi - R_{1/2}) - \frac{1}{12} \xi^3 R_{1/2} - \frac{1}{4} \xi (R_{1/2})^3 \right\} \quad (37a)$$

$$H_2(\xi) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[\xi^3 - (R_{1/2})^3 \right] \log(\xi - R_{1/2}) - \frac{1}{9} \xi^3 - \frac{1}{3} \xi (R_{1/2})^2 \right\} \quad (37b)$$

$$H_1(\xi) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\xi^2 - (R_{1/2})^2 \right] \log(\xi - R_{1/2}) - \frac{1}{2} \xi (R_{1/2}) \right\} \quad (37c)$$

$$H_0(\xi) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[\log(\xi - R_{1/2}) - 1 \right] (\xi - R_{1/2}) \right\} \quad (37d)$$

為了使方程式整理起來比較系統化，吾人將 $GG_{yj}^{(c)}(\xi)$ 代表將這些 $H_y(\xi)$ 變數加總起來的通式表示法，其下標 y 定義為 0~3，分別代表 ξ 之零次項、一次項、二次項、三次項；而 $GG_j^{(c)}$ 則是代表 $(r_{ik}A_{jk} \log B_1)(\text{CON}_{2,i,c} + \text{CON}_{0,i,c})$ 積分後的結果再乘以 $\Phi^{(c)}$ 。吾人經由整理後可得

$$GG_j^{(c)} = \sum_{k=1}^2 \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} 2 \text{Re} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{2}{3} \text{CON}_{2,i,c} + 2 \text{CON}_{0,i,c} \right) (r_{ik}A_{jk} \log B_1) \right] \quad (38)$$

$$GG_{yj}^{(c)}(\xi) = \sum_{y=0}^3 \sum_{k=1}^2 2 \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^2 [\text{CON}_{y,i,c} (r_{ik}A_{jk} H_y(\xi))] \right\} \quad (39)$$

最後，將式(36a)、式(38)、式(39)相加起來就完成了正規化的過程，並且得到下式

$$\sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} [GG_{yj}^{(c)}(\xi) + GG_j^{(c)} + \text{DIFFUG}_j^{(c)}] \quad (40)$$

式(40)乃為 $\oint_{\partial\Omega} \Phi U_{ij}(P, Q) n_i ds$ 以非直線的情形下施以正規化，接著吾人循著上述的方法，將以直線的條件下重複以上之步驟。由於直線與非直線運算最主要的差別在於其 ${}^b z_k$ 上的不同，而直線的定義已在前面的式(21)提過，並且將使用式(23)~式(27)的定義來做以下相角差之推導

$$\text{DIFF1}(\xi) = \log [C_1(\xi - R_0)(\xi - R_0)] \quad (41a)$$

$$\text{DIFF2}(\xi) = \log C_1 + \log(\xi - R_0) + \log(\xi - R_0) \quad (41b)$$

$$\text{DIFF21}_s = \text{DIFF2}(t_s) - \text{DIFF1}(t_s) \quad (41c)$$

其餘變數皆與前述相同，依循著同樣的步驟即可將直線元素正規化。接著，作者以同樣的方式處理式(11)裡右邊第四項的 $\oint_{\partial\Omega} \Phi H_{ij}(P, Q) n_i ds$ ，與上述之過程如法炮製，並將式(12d)代入可得以下之基礎函數：

$$\begin{aligned} H_{ij}(P, q) &= 2 \text{Re} [r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk} G'_k(P, q)] \\ &= 2 \text{Re} \left[\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} (\log(z_k) + 1) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

接著，將式(42)帶回原式 $\oint_{\partial\Omega} \Phi H_{ij}(P, Q) n_i ds$ 中，並代入 $N^{(c)}(\xi) \cdot n_i$ 的係數、式(12e)

及式(36a)，即可化成更完整的表示如下：

$$\oint_{\partial\Omega} \Phi H_{ij}(P, Q) n_i ds = \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} \int_{-1}^1 N^{(c)}(\xi) H_{ij}(P, Q) n_i d\xi$$

$$= \sum_{c=1}^3 \left\{ \Phi^{(c)} \int_{-1}^1 \left[\left(\text{CON}_{3,i,c} \xi^3 + \text{CON}_{2,i,c} \xi^2 + \text{CON}_{1,i,c} \xi + \text{CON}_{0,i,c} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times 2 \text{Re} \left[\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} [\log B_1 + (\log - R_1) + (\log - R_2) + 1] \right] d\xi \right] + \text{DIFFUG}_j^{(c)} \right\} \quad (43)$$

接著對各項直接積分，如同之前作法並將 ξ 同冪次項整理一起。為了後面之推導，吾人可先做以下參數之設定：

$\text{GGC}_j^{(c)}$ 代表 $\left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} \right) (\text{CON}_{2,i,c} + \text{CON}_{0,i,c})$ 積分後的結果乘以 $\Phi^{(c)}$ 、

$\text{GG}_j^{(c)}$ 代表 $\left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} \log B_1 \right) (\text{CON}_{2,i,c} + \text{CON}_{0,i,c})$ 積分後的結果乘以 $\Phi^{(c)}$

整理後的結果如下：

$$\text{GGC}_j^{(c)} = \sum_{k=1}^2 \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} 2 \text{Re} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{2}{3} \text{CON}_{2,i,c} + 2 \text{CON}_{0,i,c} \right) \left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} \right) \right] \quad (44a)$$

$$\text{GG}_j^{(c)} = \sum_{k=1}^2 \sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} 2 \text{Re} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{2}{3} \text{CON}_{2,i,c} + 2 \text{CON}_{0,i,c} \right) \left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} \log B_1 \right) \right] \quad (44b)$$

為方便描述之後的推導，吾人以 $\text{GG}_{y,j}^{(c)}(\xi)$ 代表 $\text{CON}_{y,i,c} \left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} H_y(\xi) \right)$ 積分後的表示式，而其中的 $H_y(\xi)$ 定義如同先前所述，其下標 y 定義為 0~3 (分別代表 ξ 之零次項、一次項、二次項、三次項)。因此

$$\text{GG}_{y,j}^{(c)}(\xi) = \sum_{y=0}^3 \sum_{k=1}^2 2 \text{Re} \left[\sum_{i=1}^2 \text{CON}_{y,i,c} \left(\frac{r_{ik} \mu_{ik} \mu_{ik} A_{jk}}{\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2} H_y(\xi) \right) \right] \quad (44c)$$

最後，將這些各項積分後的結果(式(44a)、式(44b)、式(44c)、式(36a))全部加總起來，將可得到正規化後的表示式：

$$\sum_{c=1}^3 \Phi^{(c)} \left[\text{GG}_{y,j}^{(c)}(\xi) + \text{GG}_j^{(c)} + \text{GGC}_j^{(c)} + \text{DIFFUG}_j^{(c)} \right] \quad (45)$$

如此一來，對體力積分式的奇異性正規化已告一段落，此方法依然適用於任何高階元素上。同樣地，上述仍然是先以非直線元素來做分析，而直線元素的定義如同前述，將可得到同樣之結果。以下將以一個實例來加以說明。

六、數值範例

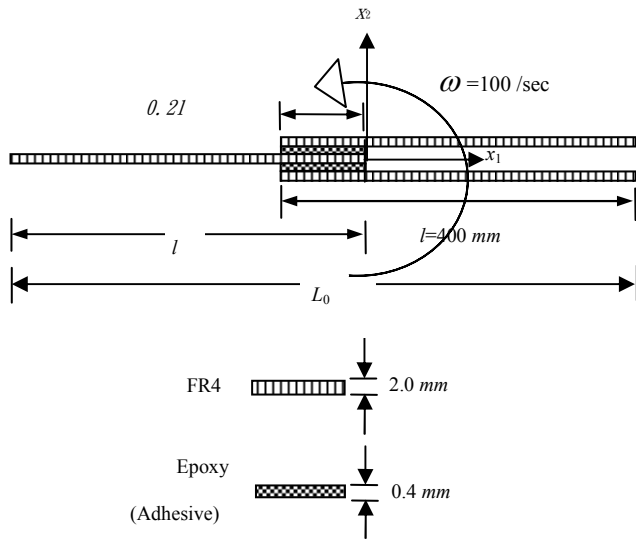
此範例考慮如下圖四所示的一個 FR4 疊層接合複材，並假設其繞座標原點以 ω 角速度旋轉。疊層間使用環氧化物作為黏著劑，其邊界條件如圖所示。因為此物件之幾何與物性為上下對稱，所以本分析使用二分之一建模(如圖五所示)。為驗證邊界元素法之分析結果，此問題並以 ANSYS 採用 PLANE82 元素分析其主應力值，並且假設此 2D 模型為平面應變之情形。由於層面間的 σ_{12} 、 σ_{22} 近似為零，皆可忽略不計，所以祇針對 σ_{11} 作圖於圖六、圖七、圖八，而並未將其餘之應力分量繪於圖中。另外，因各層材料之厚度非常微小，所以其應力在各層材料之分佈皆為均勻分佈。由圖可看出，在黏著劑兩端的應力值有奇異性。在下面的圖形皆以無因次函數表示。倘若有限元素之分析以 1:1 之元素長寬比建模，網格化的結果其元素總數量約為三萬三千多個，而使用邊界元素只需五十個二次元素就可得同樣的效果。材料的物理性質如下表一：

表一、範例中之各材料物性

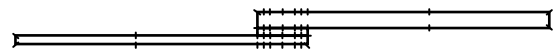
材料	楊氏係數	浦松比	剪力模數
環氧化物	$E_{11}=E_{22}=E_{33}=20.7\text{ GPa}$	$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$	$G_{12}=G_{23}=G_{13}=8.28\text{ GPa}$
FR-4	$E_{11}=E_{33}=16.85\text{ GPa}$ $E_{22}=7.38\text{ GPa}$	$\nu_{12} = \nu_{23} = 0.11$ $\nu_{13} = 0.39$	$G_{12}= G_{23}=3.29\text{ GPa}$ $G_{13}=6.95\text{ GPa}$

七、結論

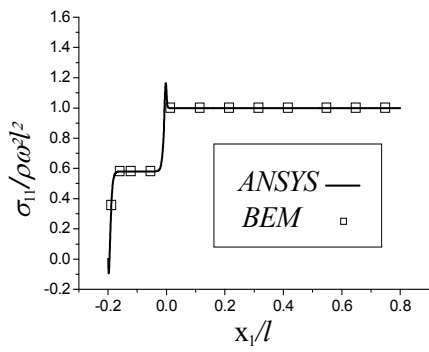
一般有限元素法之的網格長寬比盡量不要超過 1:10，否則模擬的數據之準確性會大幅降低。諸如本專題分析的例題，當疊層複材的厚度非常薄時，為了遷就此厚度，無論是有限元素法或傳統之邊界元素法皆必須採用非常多的元素做網格分割，因而造成過度之計算負荷。本專題以傳統之邊界元素法為基礎，將其異向靜彈分析之邊界積分式做正規化處理，以移除其基礎函數之奇異性。如此之處理使吾人得以用極少數之元素對極薄之疊層異向複材做正確的分析。本文以此分析技術成功的分析疊層異向複材在旋轉效應所產生之應力，文末並以一數值範例做一闡釋。



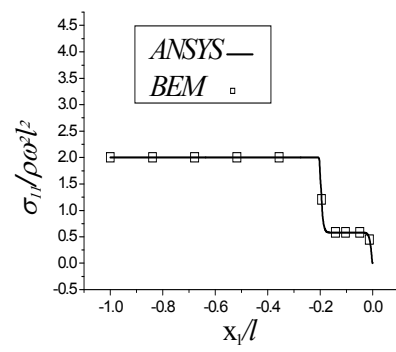
圖四、FR4 疊層複材



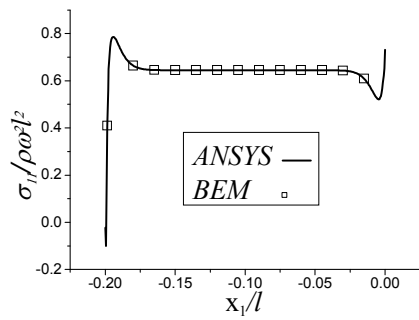
圖五、BEM 網格化



圖六、上層 FR4 之應力分佈



圖七、下層之 FR4 之應力分佈



圖八、中間黏著層之應力分佈

八、參考文獻

1. S. Sanchez-Saez, E. Barbero, R. Zaera, C. Navarro, Compression after impact of thin composite laminates, In press, Composites Science and Technology, 2005
2. Lajczok, M.R., New approach in the delamination of interlaminar shear stresses from the results of MSC/NASTRAN, Computers and Structures, V. 24, pp. 651-656, 1986.
3. Tolson, S. and Zabaraz, N., Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates, Computers and Structures 1991, **38**, pp.361-376.
4. Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M., Stress solution determination for higher order plate theory, *International Journal of Solids and Structures* 1978, **14**, pp. 655-662.
5. Kant, T. and Swaminathan, K., Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites- a selective review and survey of current developments, Journal of Composites, **49**, pp. 65-75, 2000.
6. J.J.Zhang,C.L.Tan,F.F.Afagh , A general exact transformation of body-force volume integral in BEM for 2D anisotropic elasticity, Mechanics Research Communications,Vol.23, No.2,pp.227-232.
7. Lekniskii, S.G., Theory of Elasticity of Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow, 1981.
8. Curse,T.A. Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanic.Dordrecht,Boston,Kluwer Academic Publishers,1988.
9. Krishnasamy,G. ; Rizzo,F.J.,Liu,Y.J. Boundary Integral equation:their occurrence,interpretation,regularization and computation.In:Development in Boundary Element Methods VII.Eds.P.K.Banerjee and et al.,London,Elsevier Applied Science Publisher.Chapter 7,1991