微機電系統課題中之毛細作用力探討

楊龍杰[1]、陳冠宇[2]

[1]淡江大學機電與機械工程學系教授

[2]淡江大學機電與機械工程學系碩士班研究生

國科會計畫編號：NCS-94-2212-E032-013

摘要

本文從統合表面能(surface energy)的觀點出發，利用數學解析方式，重新探討微機電系統(MEMS)中與毛細現象相關的力學模式。包括懸臂樑沾黏底板(surface stiction)、水平微流道填充流(filling flow)與新型扇骨狀制動結構等應用例，最後歸納出毛細作用力的一般化推導程序。

關鍵字：表面能、表面張力、接觸角、毛細現象

一、前言

毛細現象(capillary phenomenon)早在兩百年前，已被歐洲學者討論研究，自 1920 年代以後[1]，進展有限。近年來，由於微機電系統(MEMS)或微細加工技術之精進，許多微流體晶片陸續問世，加上光學影像擷取技術普遍，毛細現象的課題又重新受到矚目[2-3]。

對於微米(micrometer)尺度的微結構，高「面積-體積比」(high surface-to-volume ratio)致使表面張力(surface tension)能輕易左右微結構的運動行為，而超過重力等徵體力(body force)的效果。所以在面型微細加工(surface micromachining)工藝中，有所謂微結構與矽基板形成沾黏(surface stiction)而失效的情形[4]，毛細作用是負面效應。另外，善加利用毛細前緣(capillary meniscus)，可設計出無需外加能源的表面張力驅動填充管流(surface tension-driven filling flow)[5]，毛細作用是正面效應。

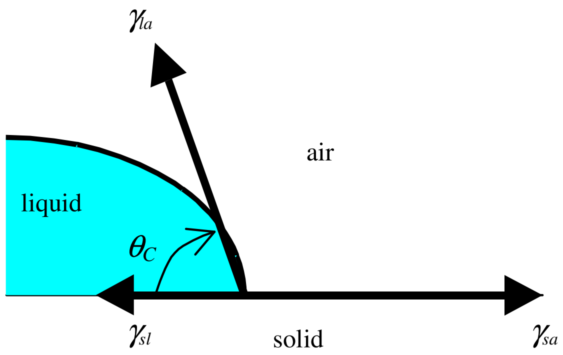
無論毛細作用對吾人感興趣的課題是正面或負面效應，正確估算毛細作用力，無疑是微流體系統優化設計重要的一步。本文主旨，即在重新思考整理一套較系統化的數學解析程序，以正確預測毛細作用力。

二、似是而非的力平衡分析觀點

楊格定律(Young's law)是討論表面張力時不可不談的定律，對於圖一液滴在固體平面介面，其表面張力關係式如下：

$$\gamma_{sa} = \gamma_{sl} + \gamma_{la}\cos\theta_C \tag{1}$$

其中 θ_c 是接觸角(contact angle)，而 γ_{sa}，γ_{sl} 與 γ_{la} 分別代表「固-氣」、「固-液」與「液-氣」兩相界面之表面張力。(1)式顯然以接觸角連接並規範了圖一中三個兩相界面表面張力的互動關係。這些兩相界面表面張力的 MKS 制單位是[N/m]，亦即單位長度內有多少內聚力，不能直接表示出微流體問題中的毛細作用總力[MKS 制單位：N]。



圖一　固體平面上一液滴的前緣，在該液、氣、固介面處，存在三種作用力的互動。

至於一般物理課本查閱得到的毛細(負)壓力或所謂 Laplace pressure 的公式如下：

$$p = \gamma_{la}\left(\frac{1}{r_l} + \frac{1}{r_t}\right) \tag{2}$$

(2)式可描述諸如圖一液滴內聚的負壓力，r_l 與 r_t 分別代表縱向與橫向液滴液面前緣(meniscus)表面的曲率半徑。但對於許多微流體課題，(2)式無法直接適用，因為微液滴的曲率半徑不易量測。所以要另覓估算毛細壓力或毛細總力的解析途徑。

乍看之下，毛細作用力除了考慮表面張力之外，似乎應還得考慮與「固-液-氣」三相界線的長度或輪廓的關連性。

以圖二垂直豎立的毛細微渠道為例，毛細作用力在垂直方向抵抗或平衡高度 Z 液柱(liquid column)的重力。若以力平衡的觀點出發，在具有「固-液-氣」界面 A-B-C-D 的三邊長乘上表面張力差值(γ_{sa}-γ_{sl})，應

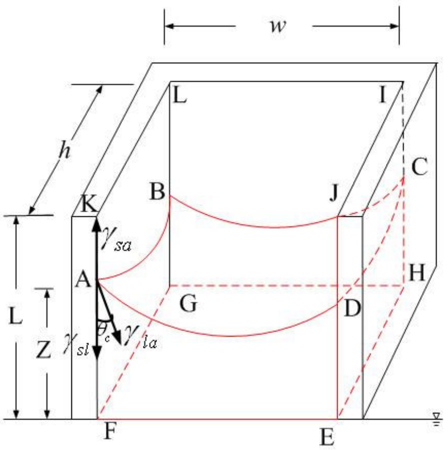
該就等於高度 Z 的液柱重：

$$(\gamma_{sa}-\gamma_{sl})(2h+w)=\rho gwhZ \tag{3}$$

(3)式左側帶入楊格定律並予以整理得高度 Z 為

$$Z=\frac{\gamma_{la}\cos\theta_c(2h+w)}{\rho gwh} \tag{4}$$

事實上，(4)式預測的液柱高少了一項來自 ADEF 曲面的貢獻，但從上述力平衡分析中，不易察覺出了什麼差錯或遺漏。



圖二 垂直豎立的毛細微渠道。

三、以表面能推導毛細作用力

前述力平衡分析的過程，若一開始遺漏了某些隱諱的作用力項，後續力平衡式的結果便不可能正確。以圖二為例，ADEF 液面在垂直方向的施力貢獻，並不容易直接看出。

若改以能量的觀點來看圖二此毛細課題，只要所有表面的能量都一一納入考量並予以加成，最後，對有興趣的方向座標進行微分，便能導出沿該方向正確的毛細作用力。由於表面能屬於純量，無需顧及方向，比較不需要物理直覺的協助，出錯機會將減少許多，是屬於比較系統化的作法(systematic approach)。

重新以能量法考量圖二，除了EFGH底面外，共有八個兩相界面，依照：(表面能)=(面積)×(表面張力)，分別納計於總表面能如下：

I、與γ_{la}相關的「液-氣」界面：

ABCD：$\gamma_{la}\times wh$ (5-1)

ADEF：$\gamma_{la}\times wZ$ (5-2)

II、與γ_{sl}相關的「固-液」界面：

ABGF：$\gamma_{sl}\times hZ$ (5-3)

CDEH：$\gamma_{sl}\times hZ$ (5-4)

BCHG：$\gamma_{sl}\times wZ$ (5-5)

III、與γ_{sa}相關的「固-氣」界面：

ABLK：$\gamma_{sa}\times h(L-Z)$ (5-6)

CDJI：$\gamma_{sa}\times h(L-Z)$ (5-7)

BCIL：$\gamma_{sa}\times w(L-Z)$ (5-8)

加成(5-1)~(5-8)，得總表面能如下：(底部儲液槽部分因面積遠大於微渠道表面，故假設其變化為零，不必採計)

$$E_s=\gamma_{la}w(h+Z)+\gamma_{sl}Z(2h+w)+\gamma_{sa}(2h+w)(L-Z) \tag{6}$$

力學系統的穩定態，發生於總能量極小的情況，圖二情況亦然。故將(6)式對Z方向做偏微分，即可得作用在液柱上的垂直方向之毛細總力。

$$F_s=-\frac{\partial E_s}{\partial Z}=-\gamma_{la}w+(\gamma_{sa}-\gamma_{sl})(2h+w) \tag{7}$$

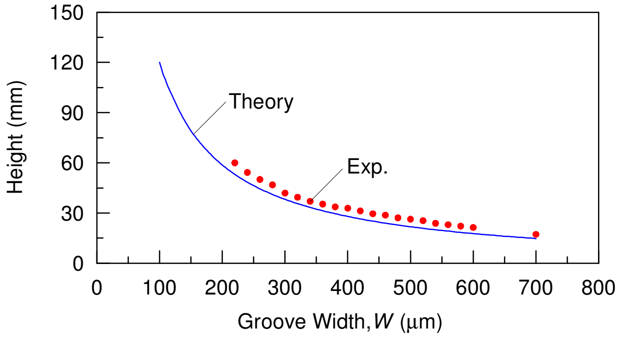
將楊格定律(1)式套入(7)式中，且令該毛細總力等於液柱之重力。

$$F_s=\gamma_{la}[(2h+w)\cos\theta_c-w]=\rho gwhZ \tag{8}$$

其中$\rho gwhz$為液柱重力。故正確的液柱高度應是：

$$Z=\frac{\gamma_{la}[(2h+w)\cos\theta_c-w]}{\rho gwh} \tag{9}$$

(9)式結果與實驗值[6]併繪於圖三(γ_{la}=0.073N/m、h=430µm、θ_C=33°)，兩套數值幾乎吻合。而且從(9)式的解析式中，可以追蹤回ADEF液面，對於毛細液柱高Z的貢獻$-\gamma_{la}w/\rho gwh$（是負面的影響)，並與接觸角θ_C無關。



圖三 微流道毛細力理論與實驗結果[6]。

四、以表面能推導毛細總力的程序

整理前一小節的解析過程，以表面能推導微系統的毛細總力程序如下：

1. 將微流體系統所有的表面，劃分為「液-氣」、「固-液」、「固-氣」等三類兩相界面。

2. 加成所有兩相界面的表面能成為總表面能，以「液-氣」兩相面為例，其單項表面能貢獻為液氣表面張力γ_{la}乘上液氣界面面積A_{la}。

3. 利用楊格定律簡化γ_{sa}與γ_{sl}為γ_{la}與接觸角θ_C。另將所有兩相界面面積，皆以微流道與微液柱的長、寬、高、夾角等尺寸參數與變數表示。

將總表面能對(液柱)沿某方向之空間座標或尺寸變數取偏微分再乘上負號，即為液柱沿該方向所受的毛細總力。

五、微懸臂樑沾黏底板的應用例

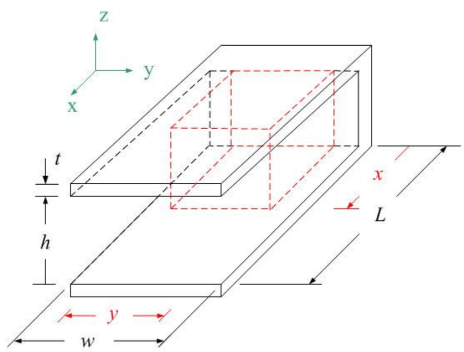
微機電系統科技中經常製作微米尺寸的懸空結構，作為感測器(sensor)或制動器(actuator)之用，其利用掏除犧牲層(sacrificial layer)程序，完成微機電元件的同時，常有沾黏底板的問題。圖四顯示一微懸臂樑下液體蒸發過程，由於樑下空間屬敞開，會同時沿水平二方向蒸發液體，故假設液體空間，長、寬、高各為x、y與h。懸臂樑垂直方向毛細作用力的探討依前一小節程序如下：

假若懸臂樑根部剛性，h不能變動，而懸臂樑尖端位置為$Z<h$(未頂到底板)，圖五之表面能為：

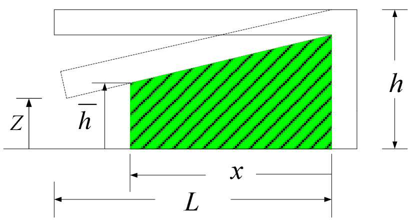
$$E_s=\gamma_{la}[(h+\bar{h})x+\bar{h}y]+\gamma_{sl}(2xy+yh)+\gamma_{sa}[2Lw-2xy+h(w-y)] \tag{10}$$

$$F_z=-\frac{\partial E_s}{\partial Z}=-\frac{\partial E_s}{\partial \bar{h}}\frac{\partial \bar{h}}{\partial Z}=-\gamma_{la}(x+y)(\frac{x}{L}) \tag{11}$$

(11)式顯示向下毛細作用總力F_z與接觸角θ_C無關(還需要實驗佐證。)



圖四 懸臂樑外型示意，虛線方塊為殘留液體。



圖五 懸臂樑下液體尺寸示意，尖端位置為$Z<h$；其中 $\bar{h}=Z+(\frac{L-x}{L})(h-Z)$，故(11)式中之微分關係$\frac{\partial \bar{h}}{\partial Z}=\frac{x}{L}$。

以下改用垂直位移δ取代Z的角色，仍假設懸臂樑未頂到底板，$\delta<h$，如圖六所示，其表面能為：

$$E_s=\gamma_{la}[(h+\bar{h})x+\bar{h}y]+\gamma_{sl}(2xy+yh)+\gamma_{sa}[2Lw-2xy+h(w-y)] \tag{12}$$

應變能（假設懸臂樑向下變形，等效於一彈性常數為K_δ的彈簧）：

$$E_\delta=\frac{K_\delta}{2}\delta^2 \tag{13}$$

依照於平衡態時，系統總能量趨於極小值的原則

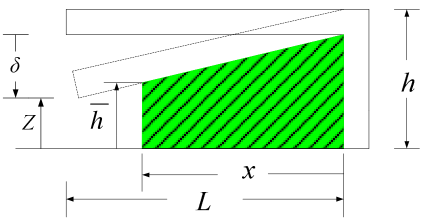
$$\frac{\partial E_{total}}{\partial \delta}=\frac{\partial(E_s+E_\delta)}{\partial \delta}=0 \tag{14}$$

$$K_\delta\cdot\delta=-\frac{\partial E_s}{\partial \delta}=-\frac{\partial E_s}{\partial \bar{h}}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \delta}=\gamma_{la}(\frac{x}{L})(x+y) \tag{15}$$

故垂直位移為：

$$\delta=\frac{\gamma_{la}}{K_\delta L}x(x+y)<h；\text{其中 } K_\delta=\frac{EI}{L}；I=\frac{wt^3}{12} \tag{16}$$

液體充滿樑下空間時，位移應最大；蒸發量越多，存留量越少，x、y縮小，位移δ也縮小，最終懸臂樑結構恢復原狀。故一開始$x=L$，$y=w$時，也是毛細作用力最大時，若無沾黏情形，後續也不會再發生沾黏。綜言之，(16)式可作為判別微懸臂樑結構是否沾黏的條件。



圖六 Z為懸臂樑尖端垂直位移δ，而$\delta<h$。

六、水平微流道填充流的應用例

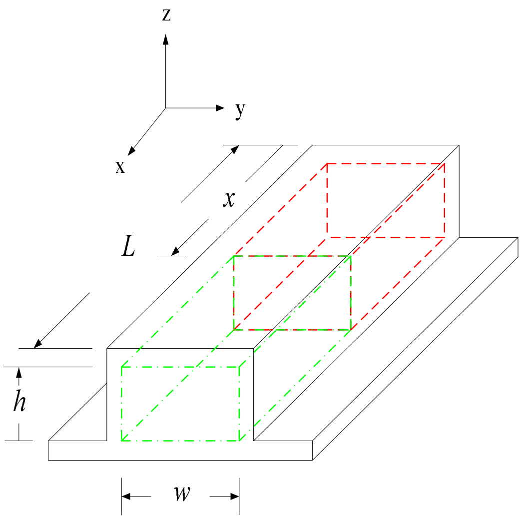
微流體系統(microfluidics)與實驗室晶片(lab-on-a-chip)是微機電系統科技重要的領域，微流體

晶片通常需要很大的壓差來推動微管路中的液體；若能巧妙利用液體表面張力的機制自我驅動，將對微系統產品的節能與縮小化有莫大的幫助。所以要善用液體表面張力的自我驅動機制，第一步要探討水平微流道填充流的現象。圖七為矩形微流道之結構圖，此結構為四面封閉只有前後的出口與入口，入口端緊接一儲液槽(reservoir)。液體隨x方向流動，寬度間隙為w，垂直高度h，全長L，其表面能為

$$E_s = \gamma_{la} \cdot 2wh + \gamma_{sl} \cdot 2x(w+h) + \gamma_{sa} \cdot 2(L-x)(w+h) \tag{17}$$

直接對 x 微分，並乘上負號，則得到液柱在毛細流道中 x 方向的受力

$$F_S = -\frac{dE_S}{dx} = 2(h+w)\cdot(\gamma_{sa}-\gamma_{sl}) = \Delta p_{la} \cdot w \cdot h \tag{18}$$



圖七 矩形微流道示意圖(-·-·- 圍成的區塊為空氣；- - - - 圍成的區塊為液體)

(18)式表示毛細作用力 F_s，等於右端的液氣面壓力差 (Δp_{la})乘上毛細流道截面積 wh。在矩形截面毛細流道寬度 w 遠大於高度 h 的前提下，右端的液氣面壓力差可表示為

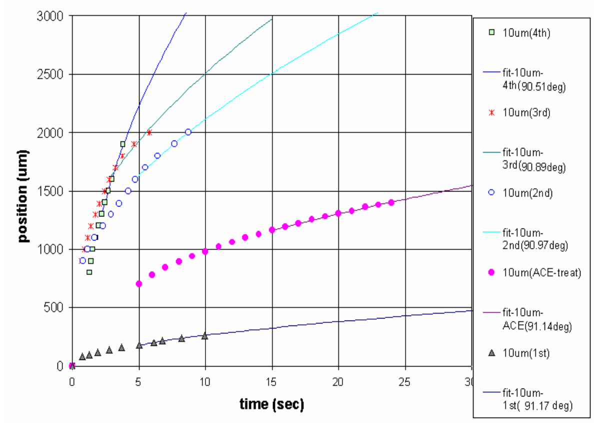
$$\Delta p_{la} = \frac{2(h+w)(\gamma_{sa}-\gamma_{sl})}{wh} \approx \frac{2\gamma_{la}\cos\theta_C}{h} \tag{19}$$

(19)式是所謂的Laplace pressure [7]：毛細流道截面尺寸h越小，壓力差越大！而接觸角θ_c的大小是量測毛細作用力的一重要訊息。

根據文獻[7]，(19)式可作為毛細前緣(meniscus)L前進驅動的力源。代入其一維非線性微分系統，得到之漸近解，即為Washburn方程式[1]，此時毛細液面前緣位置L正比於時間t的開方。

圖八顯示純水在不同表面處理後之parylene微流道(高3微米)，其液面前緣位置隨時間變動之實驗數據。由於微流道內的動態接觸角θ_C與起始位置L_0不易界定，故而在Washburn方程式廣為大家接受的前提下，利用(20)式與圖八的實驗數據比對，反求出θ_C與L_0。

$$L(t) = \sqrt{L_0^{\;2} + Dt};\quad D = \frac{h^2}{4\mu}\left[\rho \cdot G \cdot H + \frac{2(\gamma_{sa}-\gamma_{sl})}{h}\right] \tag{20}$$



圖八 純水在不同表面處理後之parylene微流道(高3微米)，其液面前緣位置隨時間變動之實驗數據 [7]。

七、新型扇骨狀制動結構的應用例

微制動器(micro actuator)制動的力道隨尺寸而一併微小，所以一般除了光學方面（如投影機微鏡面陣列DMD）的用途外，不易對週遭環境有過大之物理量影響。除非善用積少成多、積沙成塔的特性。

文獻[8]以SU-8作為挫曲式微閥門驅動模組之製作材料，製作出表面張力致動機構，如圖九所示，當工作液體進入且佈滿SU-8環狀毛細結構之中，表面張力發生驟變時，無數環狀毛細結構將相繼拉近彼此。使得形變產生區自由端發生明顯的弧狀形變，如圖十所示。工作流體部分蒸發後，形變產生區表面張力總值下降，環狀毛細結構因自身反力作用而逐漸回復至初始狀態。

圖十一(a)是上述扇骨狀制動器之單一結構，其表面能為

$$E_s = \gamma_{la}\{[2w + r(\alpha+\beta)]r + [w + r(\alpha+\beta)]Z\} + \gamma_{sl}[Z(2r + w)] + \gamma_{sa}[2(RH - rZ) + w(H-Z)] \tag{21}$$

圖十一(b)的一端結構若被挾持固定，另一端懸臂樑結構可解讀成兩條串聯的彈簧，主幹變形角度α，彈性常數K_α，分別為

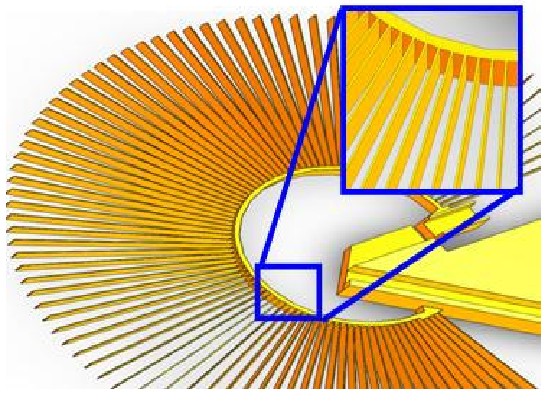
$$K_\alpha = \frac{EI_\alpha}{w}; I_\alpha = \frac{HS^3}{12} \tag{22}$$

毛細結構之變形角度β，彈簧常數K_β，分別為

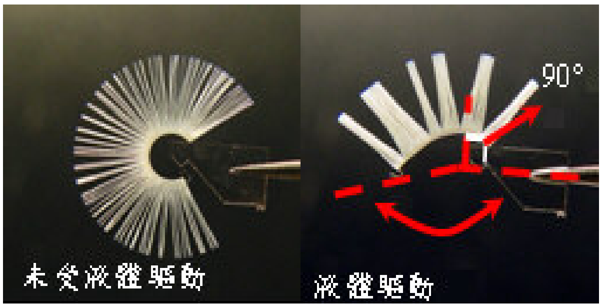
$$K_\beta = \frac{EI_\beta}{R}; I_\beta = \frac{Hw^3}{12} \tag{23}$$

故彈簧應變能為

$$E_{strain} = \frac{K_\alpha}{2}\alpha^2 + \frac{K_\beta}{2}\beta^2 \tag{24}$$



圖九 圓管挫曲式微型閥門[8]。



圖十 工作液體進入時發生的巨幅彎曲形變 [8]。

總能量(表面能加上應變能)在相對於α角與β角之穩定態時趨近極小值，故分別對α與對β進行偏微分，應該為零。

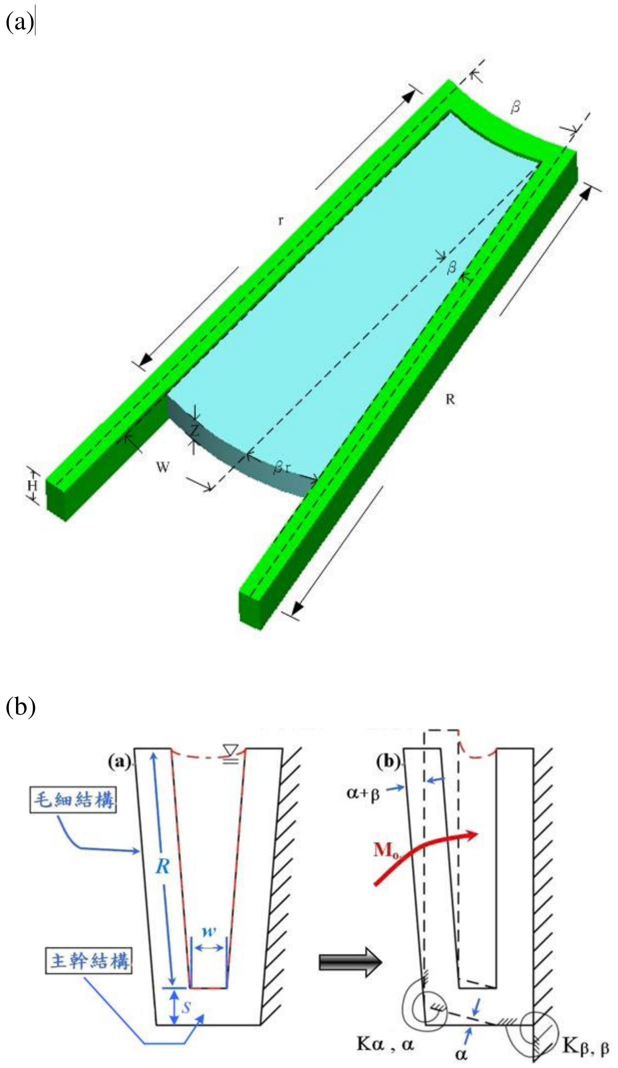
$$K_\beta\beta = \frac{\partial E_s}{\partial\beta} = -\frac{\partial E_{strain}}{\partial\beta} = \gamma_{la} r(r+Z) = M_0 \tag{25}$$

$$K_\alpha\alpha = \frac{\partial E_s}{\partial\alpha} = -\frac{\partial E_{strain}}{\partial\alpha} = \gamma_{la} r(r+Z) = M_0 \tag{26}$$

故得到一毛細彎矩產生的變形角度β為

$$\beta = \frac{\gamma_{la} r(r+Z)}{K_\beta} \;;\; \alpha = \frac{\gamma_{la} r(r+Z)}{K_\alpha} \tag{27}$$

上述分析方式，可藉由表面能觀點出發，進一步得到圖九與圖十元件因毛細作用產生的角度變化。由(27)式可知，變形角度與接觸角θ_C無關，此與文獻[8]的實驗結果部份定性現象吻合（因為圖十元件以疏水之SU-8製作，接觸角超過90度，但依然可以吸入工作液體驅動）。



圖十一 新型扇骨狀制動結構。

八、結合表面能與應變能推導毛細流固耦合課題的一般化程序

綜合前述的解析過程，我們從單純毛細作用總力的推導，擴展到結合表面能與應變能推導毛細流固耦合課題，其一般化程序可描述如下：

1. 將微流體系統所有的表面，劃分為「液-氣」、「固-液」、「固-氣」等三類兩相界面。

2. 加成所有兩相界面的表面能成為總表面能，以「液-氣」兩相面為例，其單項表面能貢獻為液氣表面張力γ_{la}乘上液氣界面面積A_{la}，同時加上毛細結構變形所產生的應變能獲得總體能量即應變能與表面能的總和。

3. 表面能方面:利用楊格定律整併γ_{sa}與γ_{sl}為γ_{la}與接觸角θ_C。另將所有兩相界面面積，皆以微流道與微液柱的長、寬、高、夾角等尺寸參數與變數表

示。應變能方面:將毛細結構的變形量平方乘上毛細結構的彈簧常數除以二。

4. 將總能量對(液柱)沿某方向之空間座標或尺寸變取偏微分再乘上負號,再加以整理便可以算出變形量。

九、結論

本文從統合表面能(surface energy)的觀點出發,利用較系統化的數學解析方式，重新探討微機電系統中與毛細現象相關的課題與其力學分析模式，並以部份實驗數據佐證之。進而統整應變能與表面能，推導毛細流固耦合的課題，計算出最後的變形量。最後歸納出表面能與應變能推導毛細流固耦合課題的程序，可提供表面張力相關微機電元件之設計參考使用。

十、參考文獻

[1] Washburn, E. W., “The dynamics of capillary flow”, *The Physical Review*, 17(3), pp.273-83 (1921).

[2] Israelachvili, J. N., *Intermolecular and Surface Forces* (London: Academic Press), p.120 (1985)

[3] de Gennes, P. G., “Wettting: statics and dynamics”, *Reviews of Modern Physics,* 57(3-I), pp.827-90 (1985).

[4] Tas, N. et al., “Stiction in surface micromachining”, *J. of Micromechanics and Microengineering,* 6(4) pp.385-97(1996).

[5] Tas, N. et al., “Nanofluidic bubble pump using surface tension directed gas injection”, *Analytic Chemistry*, 74(9), pp.2224-7 (2002).

[6] Wang, H.-J. et al., ”Capillary of rectangular micro grooves and their application to heat pipes,” *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp.249-255 (2005).

[7] Yang, L.-J., Yao, T.-J., and Tai, Y.-C., “The marching velocity of the capillary meniscus in a microchannel”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, v. 14, n. 2, pp. 220-225 (2004).

[8] 劉冠君,「圓管挫曲式微型閥門之研製」,淡江大學機電系碩士論文，2006年6月。