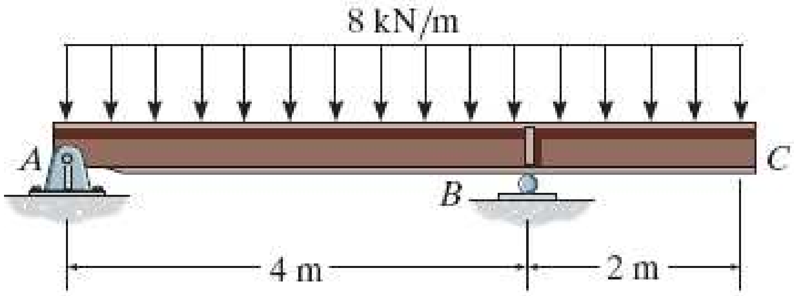
2013 年全國中學生力學競賽決賽考題

本試卷計有選擇題與填充題共20題，總分110分，答錯不倒扣。注意事項如下:

1. 請自行利用本試題卷空白部份或背面作爲計算空間，答案請填入另外發給的答案卷內。
2. 填充題以填答的內容爲主要計分標準，求解過程僅供閱卷委員給分參考，答錯不倒扣。
3. 所有數值答案若有單位請一併寫出，數值答案在合理的計算誤差範圍內都給分。
4. 題目中倘需要重力加速度者，一律以 g = 9.81 m/sec^2 計算。
5. 可以使用工程用計算機(不得具備通訊、照相、傳輸等功能)。

一、 選擇題 (共 66 分)，計 12 題，答錯或未答者給 0 分，不倒扣，請將適當的答案填入本競賽所發給的答案卷內。

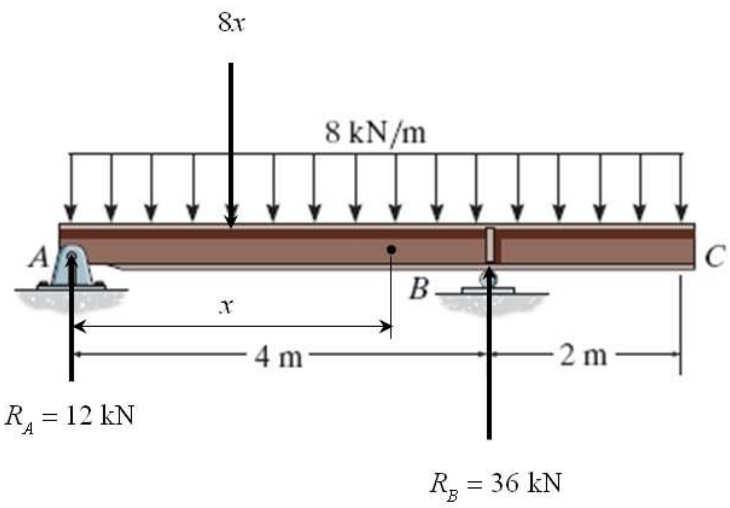


1. (5 分) 當一根樑受彎矩而彎曲時，若凹口向上，則上緣材料的縱向會受到擠壓而承受壓力，下緣材料的縱向則是受到拉伸而承受張力。反之，當一根樑受彎矩而彎曲時，若凹口向下，則上緣縱向會承受張力，下緣則是壓力。當一根長樑有一部分凹口向上，而有一部分凹口向下時，反曲點爲受彎矩爲零的地方，其材料縱向 (無論上緣或下緣) 受力爲零。考慮如圖所示的例子，有一根樑受到向下 8 kN/m 的橫向均佈載重，*A* 與 *B* 爲支承點。請問反曲點的位置與 *A* 的距離約爲多少？

(A) 2 m (B) 2.5 m (C) 3.0 m (D) 3.5 m (E) 4.0 m

參考答案：(C)。

【解】:



反力如圖所示。假設反曲點距離 *A* 爲 *x*，則此點的彎矩爲零，

$$8x\left(\frac{x}{2}\right)-12x=0$$

解得

$$x=3m$$

2. (5 分) 承上題，請問在 B 點的上緣縱向及 AB 中點的上緣縱向，各承受了張力還是壓力？

(A) B 的上緣爲張力，AB 中點的上緣爲張力

(B) B 的上緣爲張力，AB 中點的上緣爲壓力

(C) B 的上緣爲壓力，AB 中點的上緣爲張力

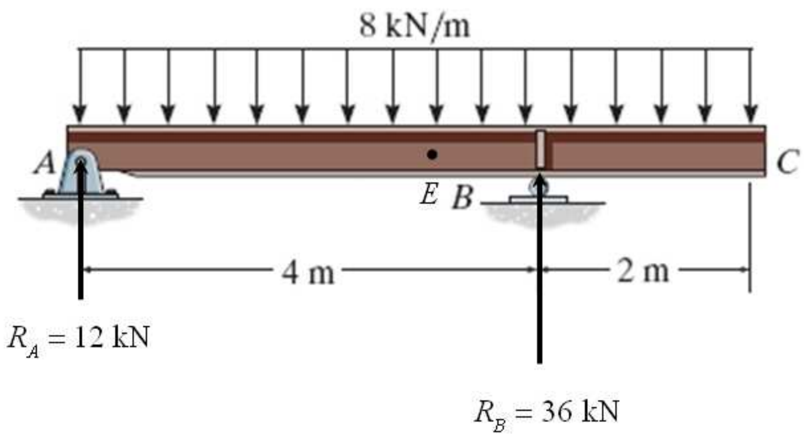
(D) B 的上緣爲壓力，AB 中點的上緣爲壓力

(E) 由已知條件無法知道

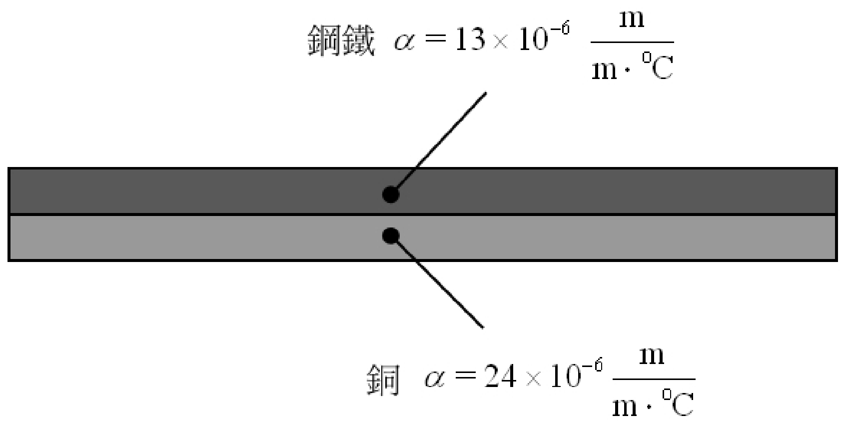
參考答案：(B)。

【解】:

下圖中，E 爲反曲點。AE 段爲凹口向上彎曲，上緣承受壓力；EC 段爲凹口向下彎曲，上緣承受張力。



3. (7 分) 熱膨脹係數 α 定義爲每單位長度的物質，每上升一個單位溫度，所膨脹的長度。圖中爲一雙層板，上層爲鋼鐵，下層爲銅，兩層之間緊密結合，沒有任何相對滑動；其中鋼鐵 $\alpha = 13\times10^{-6}\dfrac{m}{m\cdot °C}$，銅 $\alpha = 24\times10^{-6}\dfrac{m}{m\cdot °C}$。假設在室溫時，此雙層板呈平面狀態，請問溫度上升時，此雙層板凹口向上彎曲或凹口向下彎曲？鋼鐵下緣及銅上緣的縱向分別承受了張力或壓力？



(A) 凹口向下彎曲，鋼鐵下緣是壓力，銅上緣是張力

(B) 凹口向下彎曲，鋼鐵下緣是張力，銅上緣是壓力

(C) 凹口向上彎曲，鋼鐵下緣是壓力，銅上緣是張力

(D) 凹口向上彎曲，鋼鐵下緣是張力，銅上緣是壓力

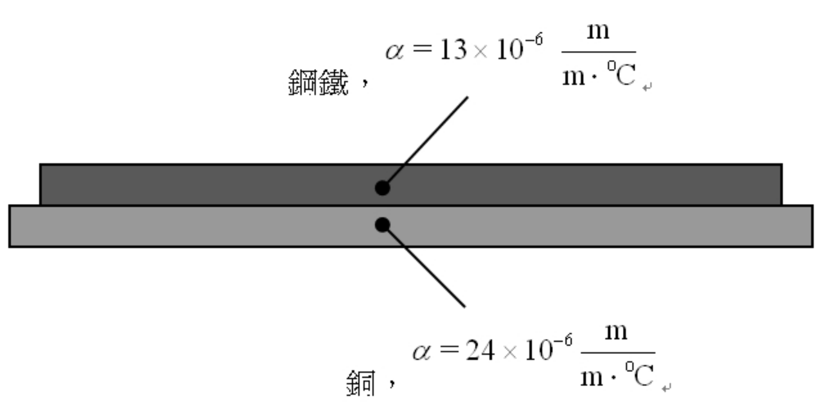
(E) 雙層板維持平面狀態，鋼鐵下緣及銅上緣沒有張力，也沒有壓力

參考答案：(D)。

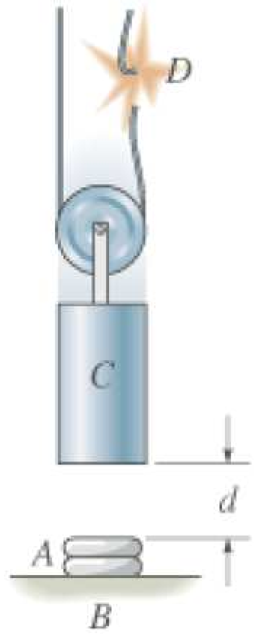
【解】:

因銅膨脹較大而鋼鐵膨脹較小，所以向上彎曲。

在兩層之間結合處，若可以自由滑動，則升溫後銅會比鋼鐵長，而且維持平面狀態（如下圖所示）。但是因爲鋼鐵下緣與銅上緣之間沒有相對滑動，爲了維持鋼鐵下緣與銅上緣有一樣的變形量，鋼鐵下緣會被拉伸（所以承受了張力），而銅上緣會被壓縮（所以承受了壓力）。



4. (5 分) 氣壓彈簧 (air spring) 是一個可以承受很大的載重的氣囊。圖中所示，A 為一氣壓彈簧，其壓縮量 x 與作用力 F 之關係為 $F = kx^2$，其中 $k = 2 \times 10^6$ N/m^2。重物 C 在 $d = 0.3$ m 突然掉落，請問該氣壓彈簧的壓縮量約為多少？(假定 $C = 500$ N)



(A) 65 mm (B) 70 mm (C) 75 mm (D) 80 mm (E) 85 mm

參考答案：(A)。

【解】:

應用功能原理，$T_1 + U = T_2$，令 δ 為壓縮量，

$$0 + W(d+\delta) - \int_0^\delta F\,dx = 0$$

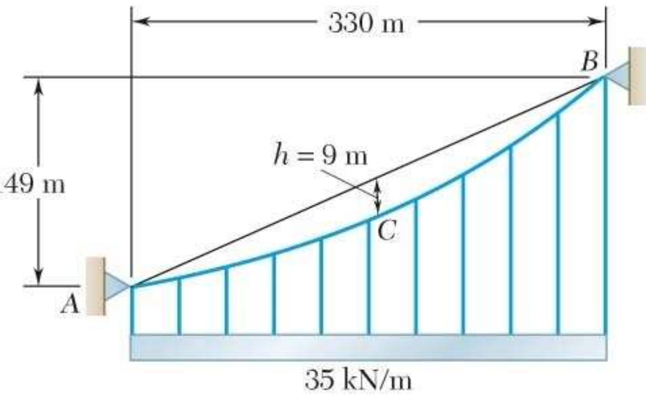
$$0 + W(d+\delta) - \int_0^\delta kx^2\,dx = 0$$

$$0 + W(d+\delta) - \frac{k\delta^3}{3} = 0$$

$$0 + 500(0.3+\delta) - \frac{(2\times10^6)\delta^3}{3} = 0$$

$$\delta = 0.065 \text{ m}$$

5. (5分) 金門大橋 (Golden Gate Bridge) 是美國舊金山的地標。它跨越聯接舊金山灣和太平洋的金門海峽，建成時曾是世界上跨距最大的懸索吊橋。如圖所示，大橋其中一組橋墩 AB 高度位置不同，其間以 ACB 鋼纜連接，並在均勻的水平間隔上以鋼索懸吊橋面，橋面單位長度的重量爲 35 kN/m (忽略其他所有重量) 。 ACB 鋼纜與弦 AB 有鉛直落差，相差最大爲 $h = 9$ m ，就在 C 點上，且 C 爲 ACB 鋼纜的中點。試求 ACB 鋼纜中所受最大張力約爲多少？

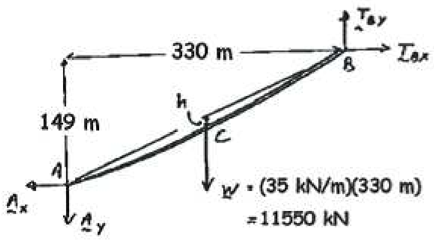


(A) 10,000 kN (B) 20,000 kN (C) 30,000 kN (D) 60,000 kN (E) 90,000 kN

參考答案：(D)。

【解】:

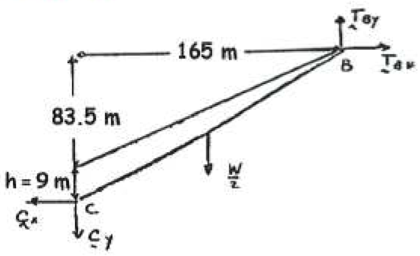
FBD AB:



$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad (330\text{ m})T_{By} - (149\text{ m})T_{Bx} - (165\text{ m})W = 0$$

$$33T_{By} - 14.9T_{Bx} = 16.5W \qquad (1)$$

FBD CB:



$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad (165\text{ m})T_{By} - (83.5\text{ m})T_{Bx} - (82.5\text{ m})\frac{W}{2} = 0$$

$$33T_{By} - 16.7T_{Bx} = 8.25W \qquad (2)$$

(1) 與 (2) 解聯立

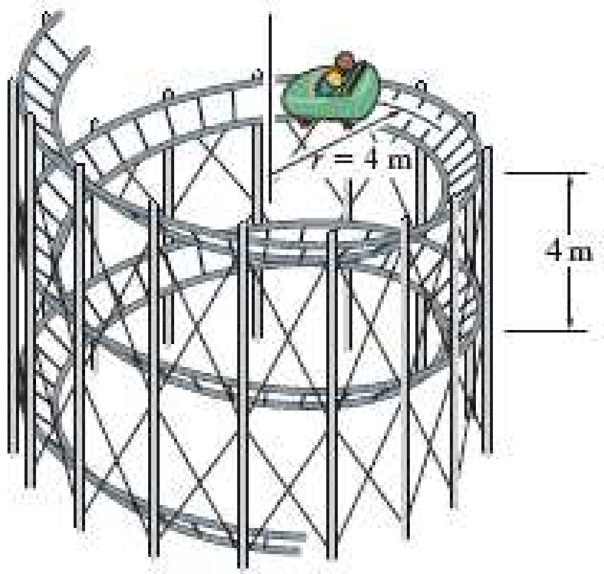
$$T_{By} = 29677.1\text{ kN}$$

$$T_{Bx} = 52937.5\text{ kN}$$

最後可得 $$T_{\max} = T_B = \sqrt{T_{B_x}^2 + T_{B_y}^2}$$

答: $T_{\max} = 60{,}689$ kN ◀

6. (5 分) 有一雲霄飛車質量為 800 kg ，行經軌道為螺旋形，螺距為 4 m ，如圖所示。其中，圓周半徑 $r = 4$ m ，不計摩擦力及空氣阻力，求雲霄飛車由靜止開始下滑，約需時若干秒才能達到 30 m/s 的速率？



(A) 3 s (B) 6 s (C) 10 s (D) 15 s (E) 20 s

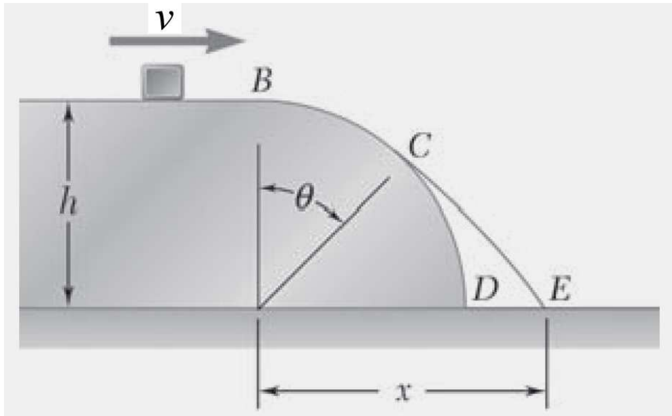
參考答案：(E)。

【解】：

$\tan\theta = h/2\pi r$ ，$\theta = 9.043^{\circ}$

$v = g \cdot \sin\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad 30 = 9.81 \cdot \sin(9.043^{\circ}) \cdot t \qquad \therefore\ t = 19.5$ s

7. (6 分) 如圖所示，一小滑塊以速度 $v = 2.4$ m/s 在離地高度 0.9 m 高的光滑水平面上滑行。當其滑至 B 點時，開始進入光滑的圓柱表面，並沿表面滑至 C 點時脫離曲面，最後著地落於 E 點。已知重力加速度 g，不計小滑塊的形狀、摩擦力以及空氣阻力的影響，試求小滑塊著地點與圓柱中心之距離 x 爲何？



(A) 0.72 m (B) 1.14 m (C) 1.54 m (D) 2.76 m (E) 3.32 m

參考答案：(B)。

【解】:

SOLUTION

Block leaves surface at C when the normal force $N = 0$.

$$+\swarrow\; mg\cos\theta = ma_n$$

$$g\cos\theta = \frac{v_C^2}{n}$$

$$v_C^2 = gh\cos\theta = gy \qquad (1)$$

Work-energy principle.

(a)
$$T_B = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2.4)^2 = 2.88m$$

$$T_C = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad U_{B-C} = W(h-y) = mg(h-y_C)$$

$$T_B + U_{B-C} = T_C$$

$$2.88m + mg(h-y) = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Using Eq. (1) $$2.88 + g(h - y_C) = \frac{1}{2} g y_C \tag{2}$$

$$2.88 + gh = \frac{3}{2} g y_C$$

$$y_C = \frac{(2.88 + gh)}{\left(\frac{3}{2}g\right)}$$

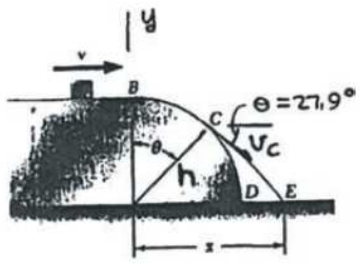
$$y_C = \frac{(2.88 + (9.81)(0.9))}{\frac{3}{2}(9.81)}$$

$$y_C = 0.7957 \tag{3}$$

$$y_C = h\cos\theta \quad \cos\theta = \frac{y_C}{h} = \frac{0.7957}{0.9} = 0.8841$$

$\theta = 27.9°$ ◀

(*b*) From (1) and (3)



$$v_C = \sqrt{gy}$$
$$v_C = \sqrt{(9.81)(0.7957)}$$
$$v_C = 2.794 \text{ m/s}$$

<u>At *C*</u>: $(v_C)_x = v_C \cos\theta = (2.794)(\cos 27.9°) = 2.47 \text{ m/s}$

$(v_C)_y = -v_C \sin\theta = -(2.794)(\sin 27.9°) = 1.31 \text{ m/s}$

$$y = y_C + (v_C)_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.7957 - 1.31t - 4.905t^2$$

<u>At *E*</u>: $y_E = 0 \quad t^2 + 0.267t - 0.162 = 0$

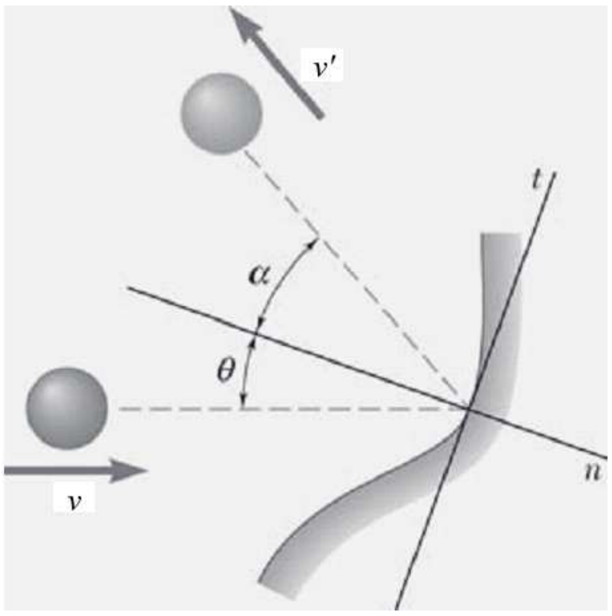
$t = 0.2906 \text{ s}$

<u>At *E*</u>: $x = h(\sin\theta) + (v_C)_x t = (0.9)(\sin 27.9°) + (2.47)(0.2906)$

$x = 1.139 \text{ m}$

$x = 1.14 \text{ m}$ ◀

8. (5 分) 在碰撞問題中，我們常定義恢復係數來衡量兩個物體在碰撞後的反彈或分離程度 (與碰撞的能量損耗有關)。假若恢復係數爲 1，則此碰撞爲彈性碰撞；假若恢復係數爲 0，則此碰撞爲完全非彈性碰撞，亦即兩物體在碰撞後將黏貼在一起運動。考慮一維碰撞爲例，恢復係數 e 可定義爲



$e=\left|\frac{\text{相對分離速度}}{\text{相對接近速度}}\right|=\frac{v_{2f}-v_{1f}}{v_{1i}-v_{2i}}$，其中 v_{1i}、v_{1f}、v_{2i}、v_{2f} 分別是第一個物體及第二個物體在碰撞前和碰撞後的速度。今考慮一小球在水平面上以速度 v 撞擊一固定的光滑曲面 (如圖所示)，假設此碰撞在法線方向的恢復係數爲 e，則此恢復係數 e 可表示爲？

(A) $\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$ (B) $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ (C) $\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}$ (D) $\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}$ (E) $\frac{\cot\theta}{\cot\alpha}$

參考答案：(D)。

9. (6 分) 承上題，小球在碰撞前後動能損失的百分率可表示爲?

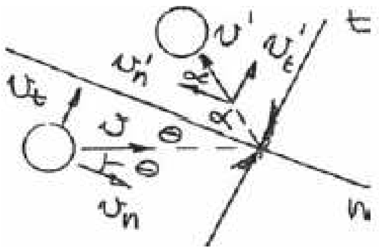
(A) $100(1-e^2)\sin^2\theta$ (B) $100(1-e^2)\cos^2\theta$ (C) $100(1-e^2)\sin 2\theta$

(D) $100(1-e^2)\cos 2\theta$ (E) $100(1-e^2)\tan^2\theta$

參考答案：(B)。

【解】:

SOLUTION



Momentum in t direction is conserved (no friction).

$$mv_t = mv_t'$$

$$v\sin\theta = v'\sin\alpha \tag{1}$$

Coefficient of restitution (n-direction).

$$v_n e = v_n' \quad v(\cos\theta)(e) = v'\cos\alpha \tag{2}$$

Dividing Equation (2) into Equation (1),

$$\frac{\tan\theta}{\tan\alpha} = e$$

Thus,

for $0 < e < 1$ $\qquad \tan\alpha > \tan\theta$ and $\alpha > \theta$ ◀

% loss in kinetic energy.

Squaring both sides of (1) and (2) and adding

$$v^2(\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta) = (v')^2$$

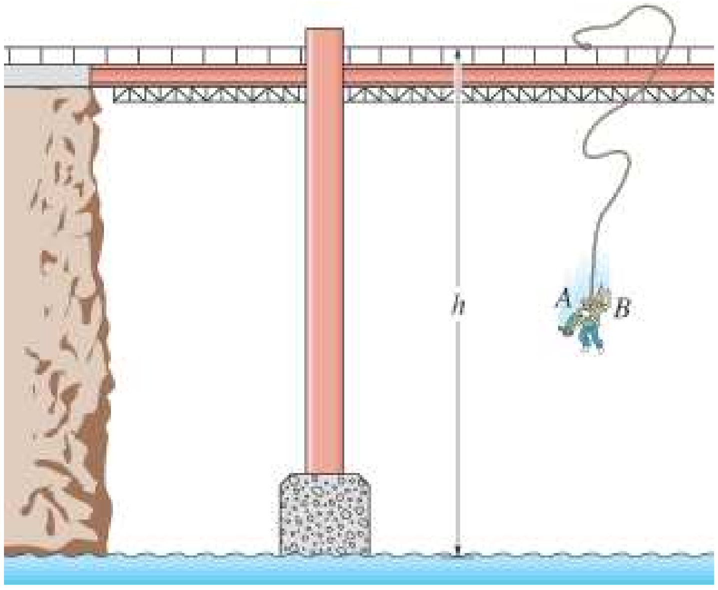
$$\Delta T = \frac{1}{2}m[v^2 - (v')^2]$$

$$= \frac{1}{2}mv^2[1 - (\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta)]$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2\cos^2\theta\,(1 - e^2)$$

$$\%\text{ loss} = 100\frac{\Delta T}{\frac{1}{2}mv^2} = 100(1 - e^2)\cos^2\theta \quad ◀$$

10 (5分) 兩個有著相同體重 W 的年輕人 A 與 B 在橋上玩高空彈跳。其中 A 繫在彈性繩的一端，已知繩的彈力常數為 k。假設 A 與 B 抱在一起自高度為 h 的橋上落下，他們希望彈性繩剛好延伸到河面時停止伸長，請問此彈性繩的原長約為多少？ (假定 $W =$ 750 N，k = 1,200 N/m，及 $h =$ 40 m)



(A) 20 m　(B) 25 m　(C) 30 m　(D) 35 m　(E) 40 m

參考答案：(C)。

11. (6分) 承上題，若 A 抱著 B 落下，在剛好接觸到河面的瞬間將 B 放開，請問 A 所承受的最大加速度 a 約為多少 (以地表重力加速度 g 來表示)，以及 A 在回彈後所能達到距河面的最大高度 H 約為多高？

(A) $a = 9\,g$，$H = 68$ m

(B) $a = 9\,g$，$H = 73$ m

(C) $a = 9\,g$，$H = 78$ m

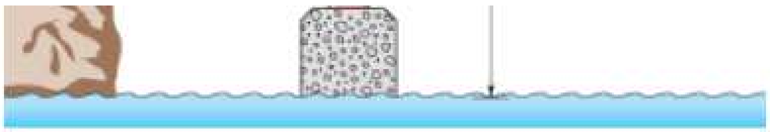
(D) $a = 15\,g$，$H = 73$ m

(E) $a = 15\,g$，$H = 78$ m

參考答案: (D)。

【解】:

Solution:



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 - 2Wh + \frac{1}{2}k(h - L)^2 \qquad L = h - \sqrt{\frac{4Wh}{k}} \qquad L = 30.00\,\text{m}$$

At the bottom, after A lets go of B

$$k(h - L) - W = \left(\frac{W}{g}\right)a \qquad a = \frac{kg}{W}(h - L) - g \qquad a = 147.1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \frac{a}{g} = 15$$

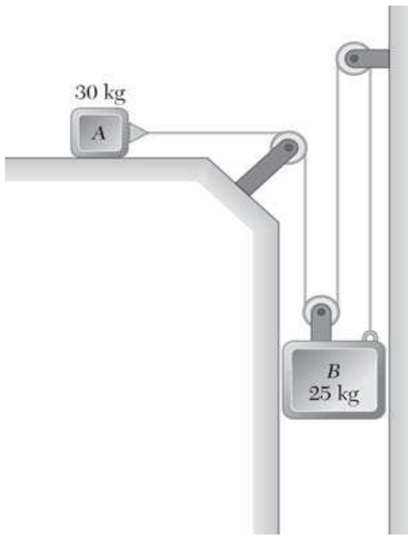
Maximum height

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3 \qquad \text{Guess} \quad H = 2h \qquad \text{Given}$$

$$0 + \frac{1}{2}k(h - L)^2 = WH + \frac{1}{2}k(H - h - L)^2 \qquad H = \text{Find}(H) \qquad H = 72.97\,\text{m}$$

This stunt should not be attempted since $\frac{a}{g} = 15$ (excessive) and the rebound height is above the bridge!!

12. (6 分) 如圖所示，兩木塊原處於靜止狀態，並忽略滑輪組和繩索的質量及摩擦，僅考慮木塊 A 與水平表面間的靜、動摩擦係數分別為 $\mu_s = 0.25$ 及 $\mu_k = 0.2$ 。試求放手後兩木塊的加速度 a_A、a_B 及繩子的張力 T 約為多少？



(A) a_A = 0.7 m/s^2，a_B = 0.23 m/s^2，T = 80 N

(B) a_A = 0.7 m/s^2，a_B = 0.47 m/s^2，T = 80 N

(C) a_A = 0.7 m/s^2，a_B = 0.23 m/s^2，T = 100 N

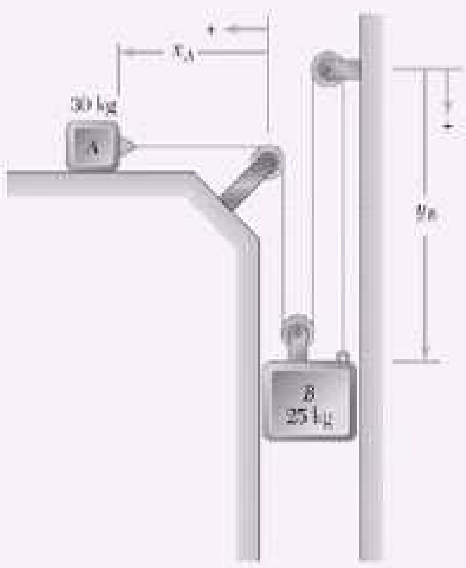
(D) a_A = 1.4 m/s^2，a_B = 0.23 m/s^2，T = 100 N

(E) a_A = 0 m/s^2，a_B = 0 m/s^2，T = 100 N

參考答案: **(A)**。

【解】:

SOLUTION



From the diagram

$$x_A + 3y_B = \text{constant}$$

Then $\quad v_A + 3v_B = 0$

and $\quad a_A + 3a_B = 0$

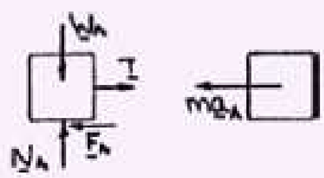
or $$a_A = -3a_B \qquad (1)$$

First determine if the blocks will move with $a_A = a_B = 0$. We have

A: $\quad \xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_A - T = 0$

B: $\quad +\downarrow \Sigma F_y = 0: \quad W_B - 3T = 0 \quad \text{or} \quad T = \frac{1}{3}m_B g$

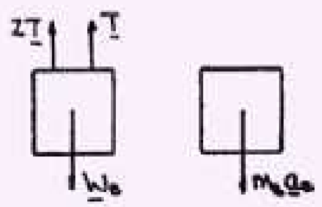
A:



Then $\quad F_A = \frac{1}{3} \times 25\ \text{kg} \times 9.81\ \text{m/s}^2 = 81.75\ \text{N}$

$$+\downarrow \Sigma F_y = 0: \quad W_A - N_A = 0 \quad \text{or} \quad N_A = m_A g$$

B:



Also, $\quad (F_A)_{\max} = (\mu_s)_A N_A = (\mu_s)_A m_A g$

$$= 0.25 \times 30\ \text{kg} \times 9.81\ \text{m/s}^2$$

$$= 73.575\ \text{N}$$

$F_A > (F_A)_{\max}$, which implies that the blocks will move.

(*a*) A: $\quad +\!\downarrow \Sigma F_y = 0\colon \quad W_A - N_A = 0 \quad \text{or} \quad N_A = m_A g$

Sliding: $\quad F_A = (\mu_k)_A N_A = 0.20\, m_A g$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = m_A a_A\colon \quad F_A - T = m_A a_A$$

Using Eq. (1) $\quad T = 0.20\, m_A g + 3 m_A a_B$

B: $\quad +\!\downarrow \Sigma F_y = m_B a_B\colon \quad W_B - 3T = m_B a_B$

or $\quad m_B g - 3(0.20\, m_A g + 3 m_A a_B) = m_B a_B$

or
$$a_B = \frac{g\left(1 - 0.6\dfrac{m_A}{m_B}\right)}{1 + 9\dfrac{m_A}{m_B}}$$

$$= \frac{(9.81\ \text{m/s}^2)\left(1 - 0.6\dfrac{30\ \text{kg}}{25\ \text{kg}}\right)}{1 + 9\frac{30\ \text{kg}}{25\ \text{kg}}}$$

$$= 0.23278\ \text{m/s}^2$$

Then $\quad \mathbf{a}_A = 0.698\ \text{m/s}^2 \longrightarrow$ ◀

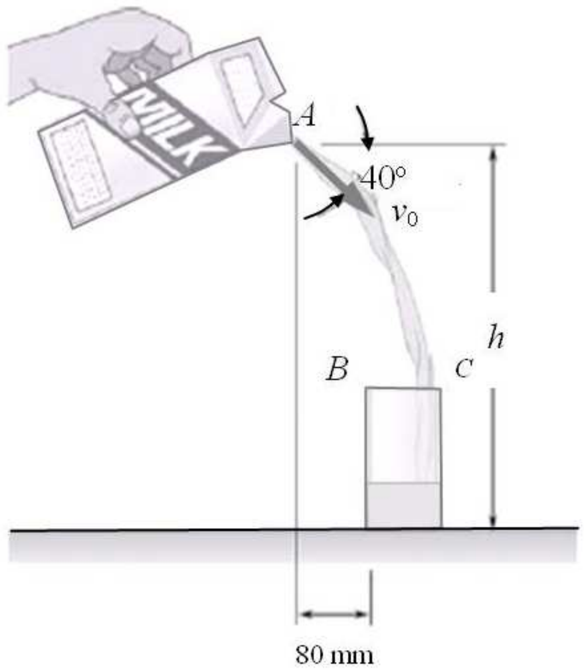
and $\quad \mathbf{a}_B = 0.233\ \text{m/s}^2 \downarrow$ ◀

(*b*) We have $\quad T = (30\ \text{kg})(0.20 \times 9.81 + 3 \times 0.23278)\ \text{m/s}^2$

or $\quad T = 79.8\ \text{N}$ ◀

二、　填充題 (共 44 分)，計 8 題，請將答案填入本競賽所發給的答案卷內。

13. (5 分) 將高度 140 mm 、內徑為 66 mm 的玻璃杯放在水平桌面上，如圖所示。若要把牛奶從盒內以 1.2 m/s 的速率倒出，並使其流出來的方向與水平成 40° 的俯角，則牛奶能順利倒入杯內之高度 h 範圍為何？____________________



【參考答案】 $0.244\text{m} \leqq h \leqq 0.386\text{m}$

【解】:

初速在水平方向（ x 座標軸）；鉛直方向（ y 座標軸）的分速度各為：

$$(v_x)_0 = (1.2\text{m/s})\cos 40^{\circ} = 0.91925\text{m/s}$$

$$(v_y)_0 = -(1.2\text{m/s})\sin 40^{\circ} = -0.77135\text{m/s}$$

因水平方向為等速度運動，其位移

$$x = 0 + (v_x)_0 t$$

而鉛直方向為等加速度，位移則為

$$y = (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

故如圖 A-1 所示，牛奶在杯口之 B 點流入時，有

$$x: \ 0.08\text{m} = (0.91925\text{m/s})\, t$$

或 $t = 0.087028\text{s}$

所以 $y: \ 0.140\text{m} = h_B + (-0.77135\text{m/s})(0.087028\text{s}) - \frac{1}{2}(9.81\text{m/s}^2)(0.087028\text{s})^2$

或 $h_B = 0.244\text{m}$

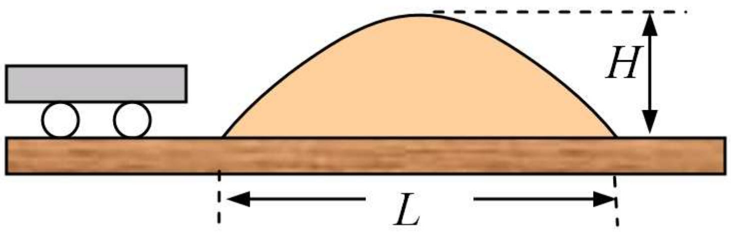
同理，牛奶在杯口之 C 點流入時，有

$x: \ 0.146\text{m} = (0.91925\text{m/s})\, t$ 或 $t_c = 0.158825\text{s}$

所以 $y: \ 0.140\text{m} = h_C + (-0.77135\text{m/s})(0.158825\text{s}) - \frac{1}{2}(9.81\text{m/s}^2)(0.158825\text{s})^2$

或 $h_C = 0.386\text{m}$　故得範圍　$0.244\text{m} \leqq h \leqq 0.386\text{m}$

14. (9 分) 有一座可沿水平桌面自由滑動的左右對稱小山丘模型，其高度 H，底部長為 L ，如圖所示。今使質量為小山丘之三分之一的小車，以量值為 v 的初速度滑上小山丘，滑行期間車子保持與山丘面接觸，且經過時間 T 後離開。若全部過程之摩擦力均可忽略，又 g 代表重力加速度，則因車子能否滑過山頂，係由初速度的臨界值 (以符號 v_0 表之) 來決定，即初速度 v 的量值大於 v_0，才可越過，反之則否，根據上述條件，使用 H、L、T、v、g 等符號，求出



(1) 臨界初速度的量值 v_0 =____。(3 分)

(2) 車子初速量值 v 小於 v_0 時，在 T 時間內，小山丘可滑動的距離 s_1 ＝____。(3 分)

(3) 車子初速量值 v 大於 v_0 時，在 T 時間內，小山丘可滑動的距離 s_2 ＝____。(3 分)

【參考答案】 (1) $2\sqrt{\frac{2gH}{3}}$ (2) $\frac{1}{4}vT$ (3) $\frac{1}{4}(vT-L)$

【解】:

2. (1) $2\sqrt{\frac{2gH}{3}}$

小車到達山丘頂點時，兩者速度若相等，則車子恰無法越過山丘，今將這個相等的速度以符號 u 表之，又取小車之質量為 m 時，小山丘應為 $3m$，故依動量守恆及能量守恆關係，得

$$mv=m\,u+3mu$$ 及

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mu^2+mgH+\frac{1}{2}(3m)u^2$$

由兩式解得

$$v=2\sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

此速度即為車子能否越過小山丘的初速度臨界值，以 v_0 表之，或 $v_0=2\sqrt{\frac{2gH}{3}}$ 。

(2) $\frac{1}{4}vT$

設系統之質心速度爲 V_c ，則用動量守恆，得

$$(m+3m)\,V_c = mv$$

即，質心速度 $V_c = \frac{1}{4}v$ ，故在 T 時間內質心移動了$\frac{1}{4}vT$

若初速 v 小於 v_0 時，小車無法越過山丘，就會形成從哪裡上山，再從哪裡下山的現象，也就是車子離質心的最後距離恢復原始狀態，這個狀態說明了 T 時間內，車子、山丘與質心移動的量相等，都是$\frac{1}{4}vT$ 。

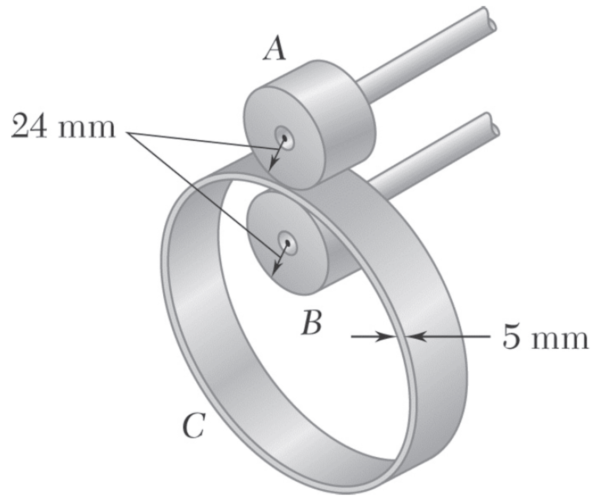
(3) $\frac{1}{4}(vT - L)$

若取山丘的質心與系統之質心距離爲 x，則由山丘之對稱關係可知，

$$x = \left(\frac{m}{m+3m}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{8}$$

因初速 v 大於 v_0 時，小車可越過山頂，並使原來位於系統質心右側的山丘，移到它的左側，即山丘相對於質心向後移了$\frac{L}{8}\times 2 = \frac{L}{4}$的距離，所以山丘的位移爲$\frac{1}{4}(vT - L)$ 。

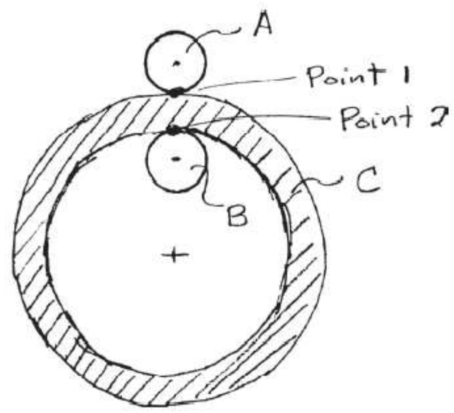
15. (4 分) 如圖所示，一圓環 C 的內半徑為 55 mm，外半徑為 60 mm，其位置夾於 A、B 兩轉輪之間 (半徑皆為 24 mm)。已知轉輪 A 以固定角速率 ω_A = 300 rpm 轉動，假設所有接觸面均不發生相對滑動，試計算 B 轉輪的轉動的角速度為多少 rpm ？________________



【參考答案】275 rpm。

【解】:

$$\omega_A = 300 \text{ rpm}\left(\frac{2\pi}{60}\right)$$
$$= 31.416 \text{ rad/s}$$
$$r_A = 24 \text{ mm}$$
$$r_B = 24 \text{ mm}$$
$$r_1 = 60 \text{ mm}$$
$$r_2 = 55 \text{ mm}$$



[We assume senses of rotation shown for our computations.]

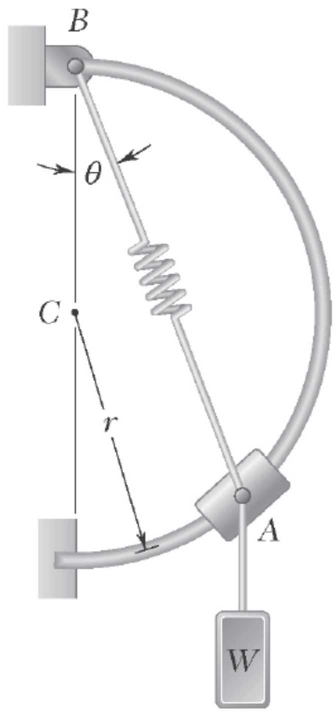
(a) Velocities: Point 1 (Point of contact of A and C)

$$v_1 = r_A\omega_A = r_1\omega_C$$
$$\omega_C = \frac{r_A}{r_1}\omega_A$$
$$= \frac{24 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}(300 \text{ rpm})$$
$$= 120 \text{ rpm} \qquad \omega_C = 120 \text{ rpm} ◀$$

Point 2 (Point of contact of B and C)

$$v_2 = r_B\omega_B = r_2\omega_C$$
$$\omega_B = \frac{r_2}{r_B}\omega_C$$
$$= \frac{r_2}{r_B}\left(\frac{r_A}{r_1}\right)\omega_A$$
$$= \frac{55 \text{ mm}}{24 \text{ mm}}\left(\frac{24 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}\right)300 \text{ rpm}$$
$$\omega_B = 275 \text{ mm} \qquad \omega_B = 275 \text{ rpm} ◀$$

16. (4 分) 如圖所示，一套環 A 可在半徑為 $r = 180$ mm 的半圓形細桿上自由滑動。今以細繩將重量 $W = 200$ N 的物體繫於其上，另將一原長亦為 r 且彈力常數 k 為 3,000 N/m 的理想彈簧一端繫於 B 點，另一端繫於 A 上。倘若不計一切的摩擦阻力，試問當系統達平衡時，彈簧與鉛直線夾角 θ 為何？___________________



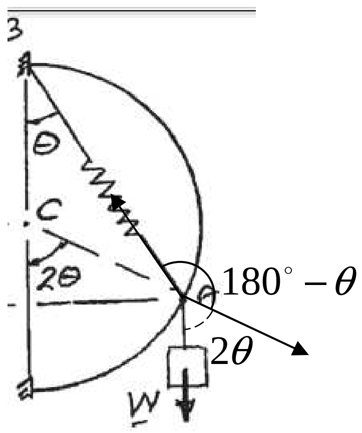
【參考答案】37.4°。

【解】:

當達平衡時，彈簧與鉛直線夾角θ

此時彈簧伸長 $2r\cos\theta - r$

由拉密定理



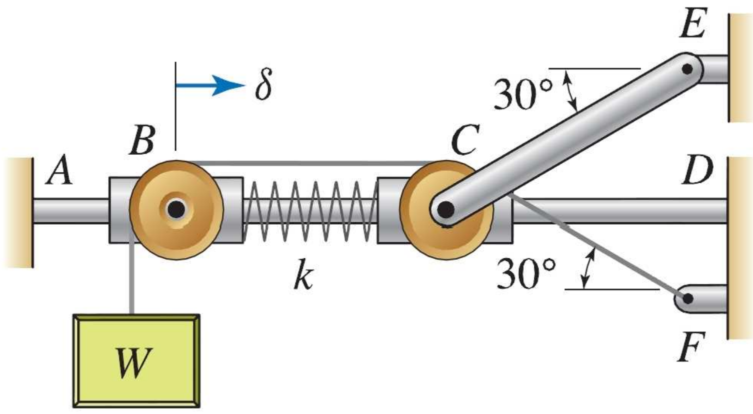
$$\Rightarrow \frac{kr(2\cos\theta - 1)}{\sin(2\theta)} = \frac{W}{\sin(180^\circ - \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{3000 \times 0.18(2\cos\theta - 1)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{200}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta - 1}{2\cos\theta} = 0.37$$

$$\Rightarrow \theta = 37.4^\circ$$

17. (6 分) 在固定的 AD 水平細桿上，有兩個可自由滑動的 B、C 套環。其上各架有一個無摩擦作用的滑輪，並以彈力常數 $k = 12$ N/mm 的理想彈簧連接。一不可伸長的細繩一端固定在牆上 F 點，另一端懸掛重量 $W = 100$ N 的重物，並繞過 B、C 上的滑輪。而 C 滑輪的中心以連桿連接於牆上 E 點，且連桿兩端均可自由轉動，忽略一切的摩擦阻力，當系統達平衡時且 CE、CF 與水平夾 30°，則



(1) CE 連桿作用力量值為何？__________________ (3 分)

(2) 彈簧的形變量 δ 為何？__________________ (3 分)

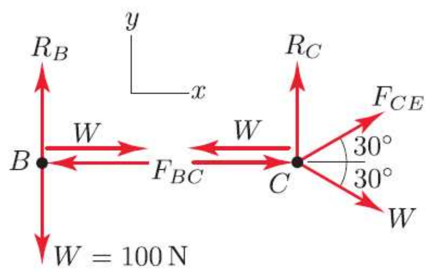
【參考答案】(1) 100 N　(2) 8.33 mm。

【解】:

Solution

Part (a) The FBDs for points B and C are shown at the right. Using the FBD for point B, the equilibrium equations are

$$\sum F_x = 0: \qquad W - F_{BC} = 0, \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0: \qquad R_B - W = 0. \qquad (2)$$



Thus,

$$F_{BC} = W = 100\,\text{N}, \qquad (3)$$
$$R_B = W = 100\,\text{N}. \qquad (4)$$

Using the FBD for point C, equilibrium equations are

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{BC} - W + W\cos 30^\circ + F_{CE}\cos 30^\circ = 0, \tag{5}$$

$$\sum F_y = 0: \qquad R_C - W\sin 30^\circ + F_{CE}\sin 30^\circ = 0. \tag{6}$$

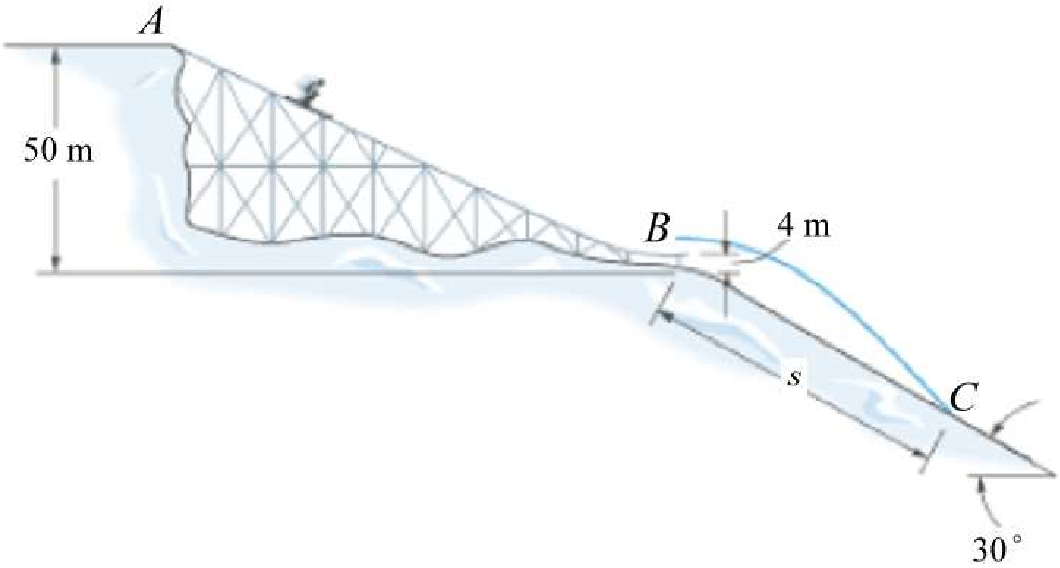
Solving Eq. (5) for F_{CE} yields

$$\boxed{\begin{aligned} F_{CE} &= \frac{(-F_{BC} + W - W\cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ}, && (7)\\ &= -100\,\mathrm{N}. && (8)\end{aligned}}$$

Using the spring law $F_{BC} = k\delta$, the displacement δ is found to be

$$\boxed{\delta = \frac{F_{BC}}{k} = \frac{100\,\mathrm{N}}{12\,\mathrm{N/mm}} = 8.33\,\mathrm{mm}.} \tag{9}$$

18. (5 分) 如圖所示，滑雪員 (含裝備) 質量共 70 kg，從 A 點自靜止沿 AB 斜坡下滑，到達 B 點時則以水平方向衝出滑落到另一斜波 BC 上。將滑雪員視爲質點，且不計任何摩擦阻力。若滑雪員在斜坡上的著陸點爲 C ，則 BC 的長度 s 爲何？______________

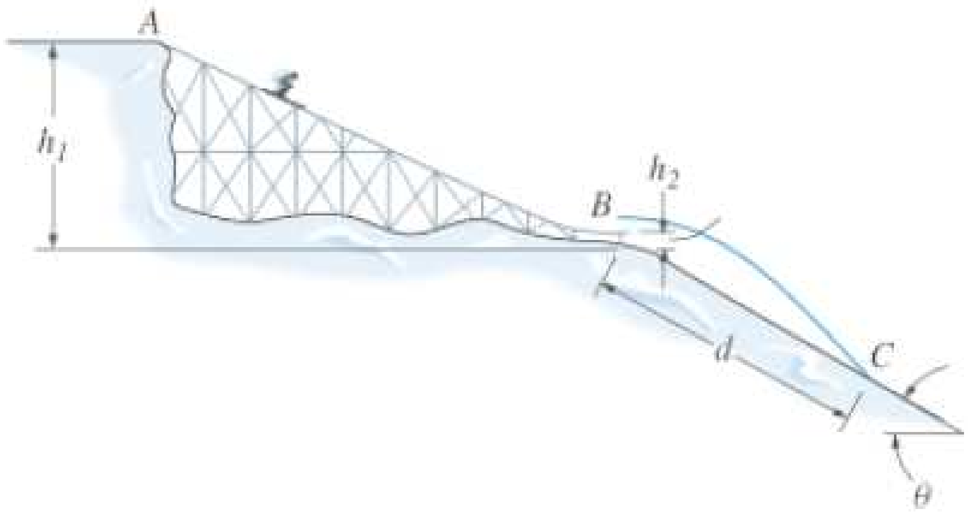


【參考答案】130.2 m。

【解】:

***Problem 14-40**

The skier starts from rest at A and travels down the ramp. If friction and air resistance can be neglected, determine his speed v_B when he reaches B. Also, find the distance d to where he strikes the ground at C, if he makes the jump traveling horizontally at B. Neglect the skier's size. He has a mass M.



Given:

$M = 70\ \text{kg}$

$h_1 = 50\ \text{m}$

$h_2 = 4\ \text{m}$

$\theta = 30\ \text{deg}$

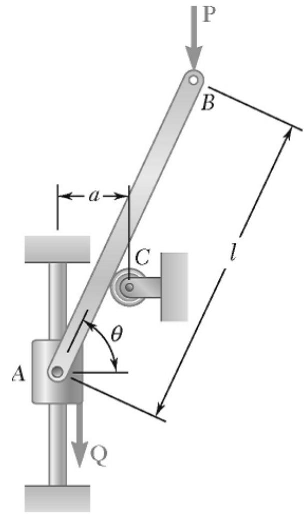
Solution:

Guesses $\quad v_B = 1\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad t = 1\ \text{s} \quad d = 1\ \text{m}$

Given $\quad Mg(h_1 - h_2) = \dfrac{1}{2}Mv_B^{\,2} \quad v_B t = d\cos(\theta) \quad -h_2 - d\sin(\theta) = \dfrac{-1}{2}gt^2$

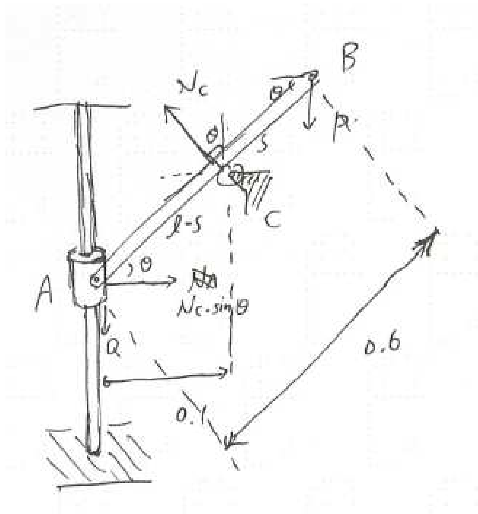
$$\begin{pmatrix} v_B \\ t \\ d \end{pmatrix} = \text{Find}(v_B, t, d) \qquad t = 3.754\ \text{s} \qquad v_B = 30.0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad d = 130.2\ \text{m}$$

19. (5 分) 一具有多點分力特性之支撐架，其受力情形如圖所示，試計算力平衡時的角度 θ 爲多少？__________ (l = 600 mm，a = 100 mm，外力 P = 100 N，Q = 160 N。)



【參考答案】 40.82 °

【解】:



$N_A = N_C \times \sin\theta$…………..(1)

$Q + P = N_C \times \cos\theta \qquad \Rightarrow N_C = \dfrac{Q+P}{\cos\theta}$……….(2)

C: $P \times S \times \cos\theta = Q \times (l-s) \times \cos\theta + N_C \times \sin\theta \times (l-s) \times \sin\theta$……..(3)

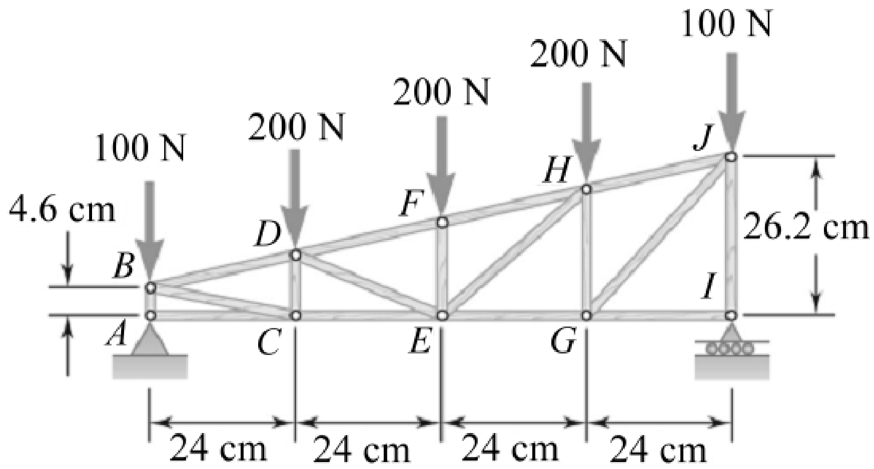
A: $N_C \times (l-s) = P \times l \times \cos\theta \qquad \Rightarrow (l-s) = \dfrac{P}{N_C} \times l \times \cos\theta$……….(4)

將(2)及(4)代入(3) $\quad \Rightarrow \dfrac{s}{l} = \dfrac{Q}{Q+P} \times \cos^2\theta + \sin^2\theta$……….(5)

$(l-s) \times \cos\theta = a \qquad \Rightarrow s = l - \dfrac{a}{\cos\theta}$……..(6)

將(6)、l 及 a 代入(5) $\quad \Rightarrow \cos^3\theta = \dfrac{13}{30} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt[3]{\dfrac{13}{30}} = 40.82°$

20. (6 分) 美侖美奐的圖書館都有書報閱讀架，如實物參考照片所示，其側面的金屬架的受力狀況是一個常見的力學問題。一個類似的結構受力狀況如圖所示，試計算桿件 EG 、 GH 及 HJ 的受力各爲多少？__________



【參考答案】。F_{EG}= 346 N，F_{GH}= 378 N，F_{HJ}= 355 N。

【解】:

Reaction at support : Because of the symmetry of the loading,

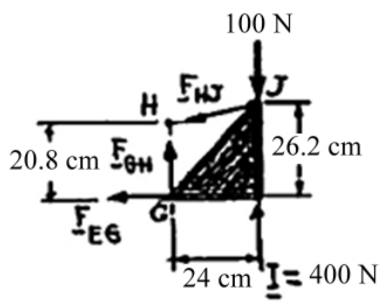
$A_x = 0$

$A_y = I = (\text{Total load}) = 1/2\ (800\ \text{N})$ $\qquad A = I = 400\ \text{N} \uparrow$

We pass a section through members EG, GH, and HJ, and use the free body shown.

$\Sigma M_H = 0 : (400\ \text{N})\ (24\ \text{cm}) - (100\ \text{N})\ (24\ \text{cm}) - F_{EG}\ (20.8\ \text{cm}) = 0$

$F_{EG} = +\ 346.15\ \text{N}$ *Tension*

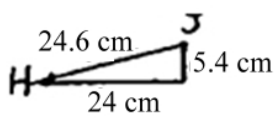


$\Sigma M_J = 0 : -F_{GH}\ (24\ \text{cm}) - F_{EG}\ (26.2\ \text{cm}) = 0$

$F_{GH} = -\ 377.88\ \text{N}$ *Compression*

$\Sigma F_x = 0 : -F_{EG} - (24\ \text{cm} / 24.6\ \text{cm})\ F_{HJ} \quad = 0$

$F_{HJ} = -\ 354.8\ \text{N}$ *Compression*



--- 題 目 結 束---